Departamento de Educação da Faculdade de Ciências
Universidade de Lisboa

A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS NA AULA DE MATEMÁTICA
UMA EXPERIÊNCIA NO 7º ANO DE ESCOLARIDADE

JOANA MARIA LEITÃO BROCARDO PORFÍRIO
Licenciada em Matemática
Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa

Tese Apresentada para Obtenção do Grau de Mestre em Educação

Professor Orientador: João Pedro da Ponte

1993

M

RESUMO

Este estudo decorreu no contexto de uma experiência pedagógica levada a cabo em duas turmas do 7º ano de escolaridade em que se valorizou a exploração de situações problemáticas e a resolução de problemas e em que a calculadora foi encarada como um importante instrumento facilitador da aprendizagem. Procurou-se analisar o percurso dos alunos em relação a três aspectos principais: a) a capacidade de resolver e formular problemas; b) a utilização da calculadora durante o processo de resolução e formulação de problemas; c) a forma como trabalhavam em pequenos grupos.

Metodologicamente, o estudo inseriu-se numa abordagem qualitativa de investigação. Os instrumentos usados para a recolha de dados foram de quatro tipos: a) registos escritos feitos pela investigadora com base na observação das aulas e das reuniões semanais com as professoras; b) registos magnéticos do trabalho realizado por dois grupos de alunos durante a formulação de problemas e da última reunião com as professoras; c) documentos produzidos pelos alunos quando da resolução em grupo e individual das fichas de trabalho; c) questionário feito aos alunos no final da experiência.

De uma forma geral, face ao problema do estudo, pôde-se concluir que, em relação à capacidade de resolução de problemas, os alunos evoluíram significativamente, utilizando estratégias adequadas, persistindo no trabalho e conseguindo apresentar resoluções por escrito em que registavam o trabalho realizado. Na resolução individual de problemas, embora alguns alunos tenham evidenciado algumas dificuldades, muitos conseguiram mostrar uma certa compreensão do problema e procurar uma estratégia adequada. Quando trabalharam em grupo nas actividades de formulação de problemas, os alunos conseguiram quase sempre apresentar enunciados que se podem consirerar problemas. No entanto, na formulação feita individualmente, 18 dos 46 alunos apresentaram enunciados de questões que são apenas simples exercícios. Apesar de a maioria dos enunciados apresentados ser do tipo do das fichas, notou-se uma clara evolução no sentido de procurar introduzir aspectos que poderiam tornar a análise do problema que propunham mais intrigante. De uma forma geral, enquanto formulavam um problema, os alunos, ou partiam da resolução de um exercício que lhes permitia obter um valor com base no qual arranjavam um enunciado, ou partiam da análise dos aspectos já explorados e procuravam identificar outros ainda por analisar. Pôde-se confirmar que a calculadora é um instrumento particularmente útil na resolução e formulação de problemas. Os alunos conseguiram uma boa organização ao nível do trabalho em grupo, discutindo entre si a resolução das tarefas. Este tipo de organização favoreceu uma maior persistência no trabalho e um maior envolvimento dos alunos mais fracos.

De uma forma geral, os alunos consideraram que a resolução de problemas "ajuda a saber pensar" e que a utilização da calculadora e o trabalho em grupo facilita a aprendizagem e os entusiasma pelo trabalho.

Palavras-chave do estudo: resolução de problemas; formulação de problemas; calculadora; trababalho em grupo.

AGRADECIMENTOS

À Teresa Olga e à Olinda, que com o seu trabalho, ajuda e inteira disponibilidade tornaram possível a realização deste estudo.

Ao Professor Doutor João Pedro da Ponte, pelo interesse e apoio na orientação deste estudo, assim como pela enorme disponibilidade e incentivo que sempre me proporcionou.

Ao Renato que com a sua calma e preciosa ajuda facilitou a execução deste trabalho.

A todas as Instituições que de alguma forma apoiaram a realização deste estudo. Ao Conselho Científico da Escola Superior de Educação de Setúbal, pela dispensa de serviço durante um semestre. Ao INIC, pela bolsa que me concedeu durante dois anos lectivos. Aos Conselhos Directivos das Escolas Secundária do Barreiro e Secundária do Alto do Seixalinho pelas facilidades concedidas.

Ao Raul e ao Mário pelo apoio que me proporcionaram.

Ao Quitó, ao João e ao Miguel, pela presença confiante e amiga e pela compreensão que demonstraram durante todos estes meses.

ÍNDICE

ÍNDICE DE QUADROS

ÍNDICE DE FIGURAS

C A P Í T U L O 1

O PROBLEMA E O CONTEXTO

Formulação do Problema

Este estudo decorre da implementação, em duas turmas do 7º ano de escolaridade, de uma proposta pedagógica em que se valorizou um processo de ensino-aprendizagem centrado na exploração de situações problemáticas e na resolução de problemas e em que a calculadora foi encarada como um importante instrumento facilitador deste processo.

Tem como objectivo analisar:

a) a evolução dos alunos em relação à capacidade de resolver problemas;

b) a evolução dos alunos em relação à capacidade de formular problemas;

c) o modo como é usada a calculadora durante o processo de formulação e resolução de problemas;

d) a forma como os alunos trabalham em pequenos grupos.

Novas Orientações Curriculares

Nos útimos anos tem-se assistido a um amplo debate sobre o currículo de Matemática para o ensino não superior. Na origem deste debate, encontra-se a crescente insatisfação com a forma como o ensino da Matemática decorre no dia-a-dia, assim como nos efeitos que produz.

O movimento habitualmente conhecido por Matemática Moderna surge, na década de 50, como uma resposta a um ensino da Matemática marcadamente mecanicista. O baixo rendimento escolar, a fraca preparação para prosseguir cursos superiores e o receio de que a crise do ensino da Matemática se pudesse vir a traduzir num atraso científico e tecnológico, contriburam fortemente para que esta reforma se desenvolvesse e generalizasse rapidamente.

Como refere Ponte (1991a), na Matemática Moderna havia uma grande preocupação de ensinar desde muito cedo as matérias mais abstractas e avançadas e o privilégio atribuído às estruturas "...não favoreceu o desenvolvimento de actividades relacionadas com os processos mais complexos de pensamento como a Resolução de Problemas" (p. 287). Este movimento, ao transpor para a Matemática escolar os objectivos, os métodos e a estrutura da Matemática Pura, acabou por se caracterizar por uma exigência de rigor e de abstracção que dificultavam a aprendizagem da Matemática a muitos dos alunos (ICMI, 1986). Por outro lado, como é referido pela APM (1988),

> "aceitando que a aprendizagem se desenvolve por *transmissão* e *absorção*, e não *por construção*, a reforma da Matemática Moderna continha afinal os germens do seu próprio fracasso" (p. 8).

O impasse a que o currículo da Matemática Moderna conduziu, tem levado a que em muitos países se discutam de novo as principais linhas de força que devem orientar o ensino da Matemática.

Em 1978, o National Council of Supervisors of Mathematics (NCSM) manifesta-se contra o movimento de opinião *Back to Basics* (que defendia o retorno à primazia das técnicas básicas de aritmética e álgebra), defendendo que o conceito de capacidades básicas em Matemática evolui à medida que a sociedade evolui. Para este organismo, a resolução de problemas é a primeira de dez capacidades básicas em Matemática, uma vez que "aprender a resolver problemas é a principal razão para estudar Matemática" (p. 148).

Em *An Agenda por Action*, do NCTM (1980), as grandes linhas que virá a seguir o ensino da Matemática começam a definir-se. As recomendações que vão servir de base à discussão sobre a definição do novo currículo de Matemática, incluem (1) focar o ensino da Matemática na resolução de problemas, (2) definir capacidades básicas em Matemática num sentido amplo que não abranja só a facilidade de cálculo, (3) tirar todas as vantagens da utilização das calculadoras e dos computadores e (4) praticar níveis de eficácia e de eficiência rigorosos, no ensino da Matemática.

Em *School Mathematics in the 1990s*, do ICMI (1986), é mais uma vez apontada a necessidade de uma ampla discussão (para a qual este documento pretende contribuir apontando sobretudo alternativas) em torno dos grandes objectivos do ensino da

Matemática, visto que, na sua perspectiva, nos anos 90 os cidadãos activos e bem informados necessitarão de uma maior compreensão da Matemática.

Com a publicação dos *Standards* do NCTM (1989), a importância de reunir esforços no sentido de proporcionar aos alunos uma educação Matemática compatível com as novas exigências económicas e sociais é profundamente realçada. Neste documento são apontados cinco objectivos gerais para todos os alunos – (1) aprender a valorizar a Matemática, (2) tornar-se confiante na capacidade de fazer Matemática, (3) resolver problemas de Matemática, (4) comunicar matematicamente e (5) aprender a raciocinar matematicamente – que reflectem a necessidade de uma profunda alteração, não só dos conteúdos, mas também de atitudes e métodos.

No documento *Everybody Counts* (NRC, 1990), muitos dos pressupostos dos *Standards* são discutidos de uma forma mais explícita, nomeadamente a ideia de que o desenvolvimento económico de um país depende em grande parte da formação Matemática dos seus cidadãos. Neste documento aponta-se a urgência de promover um amplo debate sobre as grandes metas da educação Matemática e de criar condições para uma efectiva mudança.

Em todos estes documentos encontramos recomendações para que, no ensino da Matemática, seja dada especial atenção à resolução de problemas e à utilização das novas tecnologias.

Como refere Ponte (1991a), desde os fins dos anos 60 até ao princípio dos anos 80, Portugal esteve afastado do movimento internacional do ensino da Matemática. Durante este período privilegiavam-se sobretudo os aspectos marcadamente científicos, a psicologia da aprendizagem e a "pedagogia por objectivos".

Com o reatar das relações internacionais, começaram a ter eco entre nós algumas das questões debatidas em torno dos grandes objectivos da educação Matemática (Ponte, 1991b). Nomeadamente a atenção dada à resolução de problemas e à utilização das calculadoras tem sido bem patente, quer em comunicações em encontros de professores, quer em publicações que têm vindo a ser divulgadas sobre o assunto. Sem pretender esgotar todas estas referências, serão apontadas algumas, no sentido de ilustrar a crescente preocupação, que em Portugal se tem sentido, em relação a uma mudança profunda no ensino da Matemática, e o papel importante que a resolução de problemas e a utilização da calculadora desempenham nesta mudança.

Numa comunicação apresentada no colóquio *O Ensino da Matemática anos 80*, J. Ponte e P. Abrantes (1982) apontavam a resolução de problemas como o elemento chave capaz de

> "...transformar o estudo da Matemática da coisa rotineira que se faz por obrigação na coisa viva e estimulante que se faz por gosto." (p. 202).

Era realçada a participação activa do aluno e a resolução de problemas era encarada como parte integrante da disciplina de Matemática.

Nomeadamente a partir de 1986, data da fundação da APM (Associação de Professores de Matemática), têm sido publicados numerosos artigos em que é realçada a resolução de problemas e a utilização de novas tecnologias. De entre estes, destaca-se o documento *Renovação do Currículo de Matemática* (1988), onde são apontados alguns princípios, pressupostos e orientações para um currículo de Matemática, assim como especificados os grandes objectivos para o ensino da Matemática. Neste texto, e no que se refere aos objectivos e orientações para o ensino da Matemática, são identificadas as seguintes ideias fundamentais: a) que os alunos sejam confrontados com experiências diversificadas em contextos de aprendizagem ricos e variados; b) que a aprendizagem da Matemática constitua uma experiência positiva com significado e importância por si mesma; c) que se encorajem experiências de aprendizagem que tenham em conta motivações e interesses de natureza individual; d) que a avaliação seja compatível com as três orientações anteriores. Quanto ao que se refere a orientações mais especificamente ligadas à natureza das actividades dos alunos, é realçada a importância da resolução de problemas, das aplicações da Matemática e da utilização das novas tecnologias.

Também nos novos programas de Matemática do Ensino Básico (DGEBS, 1990, 1991a, 1991b), em fase de generalização a partir de 1991/92 no 1º Ciclo e de 1992/93 no 2º e 3º Ciclos, a importância atribuída à resolução de problemas e à utilização de calculadoras é significativamente diferente da que lhe era reservada nos anteriores programas.

De tudo o que anteriormente foi dito, podemos pois concluir que é bem evidente a recomendação de valorizar a resolução de problemas e a utilização da calculadora nas várias propostas de renovação curricular.

Problemas e Situações Problemáticas no Processo de Ensino-Aprendizagem

Mais importante do que uma alteração ao nível dos conteúdos a incluir na Matemática escolar, é uma mudança nos métodos de ensino e na natureza das actividades dos alunos (APM, 1988).

Mudanças sociais e tecnológicas têm implicado um repensar da escola e dos seus objectivos. As perspectivas com que se encara o processo de ensino-aprendizagem mudam na medida em que se vão desenvolvendo novas teorias sobre a forma como aprendemos e pensamos.

Resultados de investigações em psicologia apontam no sentido de que, em muitas situações, é a análise de uma tarefa para o desempenho da qual não se possuem conhecimentos prévios que proporciona situações de aprendizagem em que são assimilados novos conhecimentos e estabelecidas novas relações (Resnick, citada por NCTM 1989). Esta ideia, que se opõe à de uma aprendizagem concebida como um processo de absorção reforçado por uma prática repetitiva, implica que no trabalho escolar se proporcionem aos alunos experiências diversificadas com base nas quais eles possam construir os seus próprios conhecimentos, relacionando-os com os anteriores.

Para Pólya (1981), "aprender a pensar" é a grande finalidade do ensino. A aprendizagem deve ser activa, motivadora e processar-se em fases consecutivas. Assim, para este autor, devem ser proporcionadas situações de aprendizagem que despertem o interesse dos alunos e em que eles sejam desafiados a descobrir resultados e a estabelecer relações. Considera ainda que a aprendizagem deve ter em conta o "princípio das fases consecutivas", em que uma fase exploratória precede a formalização de conceitos, culminando com a integração numa estrutura conceptual.

Romberg (1984), salienta que ao se encarar o ensino da Matemática como um processo em que o aluno absorve conhecimentos que alguém já desenvolveu, e ao considerar a aquisição de conceitos e técnicas um fim em si mesmo, se perdem características essenciais da actividade matemática como explorar, levantar hipóteses e demonstrar, abstrair e generalizar, formular e resolver problemas, criar modelos.

Ao deslocar o papel do aluno de um mero receptor de informação para um participante activo na construção do seu conhecimento matemático, é fundamental interrogarmo-nos sobre o que *fazem* os alunos na aula de Matemática, que experiências de trabalho lhes são proporcionadas e com que perspectivas são elas trabalhadas e exploradas.

A recomendação de que a resolução de problemas e a exploração de situações problemáticas deverá constituir o tipo privilegiado das actividades em Matemática, tem vindo a ser cada vez mais reforçada nos últimos anos. Como refere a APM (1988), este privilégio justifica-se sobretudo porque:

. as actividades de resolução de problemas e de situações problemáticas permitem que o aluno faça a sua própria experiência matemática;

. estas actividades conduzem naturalmente a outras igualmente importantes - análise de estratégias a adoptar, argumentação, tentativas de prova, crítica dos resultados e construção de conceitos;

. o desenvolvimento da capacidade de resolver problemas assume um papel importante não só na Matemática, mas também no ensino em geral.

Um problema pode desafiar a curiosidade do aluno, proporcionar a exploração informal de vários caminhos, incentivar o gosto pela descoberta. Na exploração de situações problemáticas os alunos podem realizar pequenas investigações, formular problemas, analisar caminhos e resultados, tendo assim oportunidade de "fazer" Matemática.

É pois importante que se proporcionem aos alunos actividades de resolução e formulação de problemas e de exploração de situações problemáticas que possam constituir um contexto de trabalho em que a construção de conceitos e técnicas surja de uma forma natural.

As Potencialidades Educativas da Calculadora

Trabalhar com a calculadora na aula de Matemática significa uma reavaliação do que é a Matemática e do significado de "saber Matemática", implicando, necessariamente, uma reflexão nas actividades a propor e na forma de organizar o trabalho.

A calculadora é um elemento que obriga, em primeiro lugar, a repensar a importância e prioridade do cálculo e a forma de trabalhar a sua aprendizagem. Assim, ao desviar a ênfase do ensino da Matemática das técnicas rotineiras de cálculo, a compreensão das operações, a ordem de grandeza dos resultados e a estimação dos mesmos são mais focadas e desenvolvidas. Um ensino da Matemática em que a principal prioridade se situa na execução de técnicas de cálculo não facilita a compreensão do sentido do número e a exploração de situações que envolvam cálculos mais demorados e mais ligadas à vida de todos os dias. A possibilidade de trabalhar com números das mais variadas ordens de grandeza, de se investigarem relações e propriedades numéricas e de se ampliarem as manipulações numéricas, é largamente favorecida pela utilização da calculadora. A calculadora é, sem dúvida, um poderoso instrumento de cálculo, muito embora tenha algumas limitações. Mas, a análise destas limitações pode conduzir a discussões bastante interessantes.

Por outro lado, na resolução de problemas, a calculadora é um importante elemento facilitador, aliviando o peso dos cálculos envolvidos no problema e permitindo focalizar a atenção no seu processo de resolução. Possibilita ainda trabalhar com dados numericamente mais complexos, o que pode facilitar a análise de problemas mais ligados à vida real. Na resolução de problemas, a calculadora é ainda um elemento importante na medida em que facilita a discussão do resultado e a exploração de generalizações.

Finalmente, a construção de conceitos é um processo lento que deve ser fortemente suportado pela experimentação, investigação, formulação de conjecturas e generalização de situações. A utilização da calculadora, além de facilitar amplamente estas actividades, permite, como refere Ponte (1989), "ancorar firmemente a actividade matemática na representação numérica, onde a maioria dos alunos se move mais à vontade, partindo daí para as representações gráficas e algébricas, mais abstractas." (p. 2).

A Proposta Pedagógica

Este estudo decorreu de uma experiência de trabalho realizada entre Setembro de 1991 e Abril de 1992 com os alunos de duas turmas do 7º ano de escolaridade, em que se valorizou um ensino-aprendizagem da Matemática centrado na exploração de situações problemáticas, na resolução de problemas e em que se procurou tirar partido das potencialidades educativas da calculadora.

A definição desta proposta pedagógica esteve de acordo com a aceitação de alguns pressupostos em relação à Matemática e à forma como se deve processar a sua aprendizagem.

A Matemática foi encarada como uma ciência em constante evolução em que a exploração informal, a tentativa e erro e a intuição desempenham um papel importante.

No que respeita à aprendizagem da Matemática, esta deverá constituir uma experiência que desenvolva nos alunos uma atitude de auto-confiança, de prazer em enfrentar desafios e que permita uma maior compreensão e poder de intervenção num mundo cada vez mais matematizado.

Mais concretamente, a definição da proposta pedagógica, partiu da aceitação dos seguintes princípios gerais:

1. A formulação e resolução de problemas são importantes na formação matemática dos alunos.

2. O ensino-aprendizagem da Matemática deve decorrer num ambiente de trabalho que estimule o aluno a envolver-se activamente na construção do seu conhecimento.

3. A calculadora pode ser um instrumento importante na construção de conceitos e na formulação e resolução de problemas.

4. O trabalho em pequenos grupos, na medida em que permite o desenvolvimento de capacidades como argumentar e criticar, expôr as suas ideias e ouvir as dos seus colegas, comparar estratégias e soluções, é uma experiência que deve ser proporcionada aos alunos.

5. Na exploração de situações que favoreçam uma participação activa dos alunos é importante dar tempo para que estes possam desenvolver as actividades que lhes são propostas e reflectir sobre elas.

Na definição das linhas gerais da proposta pedagógica e das actividades a realizar com os alunos, a investigadora trabalhou com as duas professoras responsáveis pela sua concretização, ao nível da sala de aula. Procurou-se, assim, criar condições para uma efectiva sintonia quanto aos objectivos da experiência e quanto à metodologia a seguir. A proposta pedagógica não surge pois, como exterior às professoras que a implementaram, representando, pelo contrário, as opções, as actividades e as estratégias que também elas consideraram ser importantes privilegiar no ensino-aprendizagem da Matemática.

Ao longo de toda a experiência a distribuição semanal de horas na disciplina de Matemática foi de 2 + 1 + 1.

Na primeira fase de trabalho com os alunos, que decorreu de Setembro a Dezembro, procurou-se sobretudo que os alunos desenvolvessem hábitos de trabalho em grupo e se integrassem numa perspectiva de ensino-aprendizagem em que o professor é sobretudo um organizador de actividades e em que os alunos participam activamente na construção do seu saber.

Numa segunda fase, que decorreu de Janeiro até ao final de Abril, procurou-se desenvolver, de uma forma mais sistemática, a capacidade de resolução e formulação de problemas.

De uma forma geral, em ambas as fases, nas aulas de duas horas os alunos trabalhavam em grupos de 4 ou 5 na resolução das fichas de trabalho que lhes eram propostas. Nas aulas de uma hora, a partir das actividades exploradas em grupo, as professoras formalizavam conceitos e regras, organizavam sínteses e propunham exercícios de prática.

Significância do Estudo

Diversas entidades têm insistentemente formulado recomendações no sentido de se centrar o processo de ensino-aprendizagem da Matemática na exploração de situações problemáticas e na resolução de problemas e de se tirar todas as vantagens das potencialidades educativas das novas tecnologias (APM, 1988; Cockroft, 1982; NCTM, 1989). No entanto, elas são ainda encaradas como metas a atingir, sendo amplamente reconhecido que a realidade do processo de ensino-aprendizagem da Matemática está ainda longe de traduzir uma prática de acordo com estas recomendações. Os poucos dados existentes no nosso país apontam precisamente no sentido de que, apesar da crescente importância que é atribuída à resolução de problemas, à exploração de situações problemáticas e à utilização das calculadoras, o lugar que ocupam ao nível da sala de aula é ainda bastante limitado.

Neste sentido se situam as conclusões a que chegaram Franco e Teixeira (1987) num estudo sobre a atitude dos professores em relação à resolução de problemas. Assim, dos 13 professores entrevistados, a maior parte só resolve problemas de aplicação directa de conteúdos do programa (a propósito das equações do 1º grau ou do teorema de Pitágoras), sentindo dificuldades na implementação continuada da resolução de problemas na sala de aula.

No mesmo sentido se colocam os resultados de um inquérito realizado por Carvalho (1990), a 71 professores do 1º Ciclo do Ensino Básico. Dos 45 professores que afirmam que seriam capazes de utilizar a calculadora com os seus alunos, a maioria confere-lhe apenas importância para confirmar resultados ou para familiarizar os alunos com novas técnicas.

A implementação dos novos programas de Matemática do Ensino Básico, em fase de generalização no 2º e 3º Ciclo a partir de 1992/93, poderá contribuir para uma mudança que valorize a resolução de problemas, a exploração de situações problemáticas e a utilização das calculadoras no ensino-aprendizagem da Matemática.

No entanto, todos reconhecemos que a forma como se processa o ensino-aprendizagem de uma dada disciplina não se muda "por decreto". Pelo contrário, é um processo lento que envolve a realização e análise de várias experiências, amplas discussões em torno das vivências proporcionadas e dos resultados obtidos.

A maior parte das investigações realizadas em torno da resolução de problemas têm dedicado pouca atenção ao que de facto se passa a nível da sala de aula, nomeadamente na descrição da interacção professor/aluno, aluno/aluno e do ambiente de trabalho que se estabelece (Lester e Charles, 1992).

Por outro lado, como refere Silva (1991), apesar de se terem realizado bastantes estudos na área da Educação Matemática sobre calculadoras, a sua grande maioria limita-se a investigar as implicações da sua utilização a nível das capacidades básicas de cálculo e atitudes dos alunos.

Tendo em conta estes aspectos, assim como os discutidos ao longo deste capítulo, assume-se a importância da implementação e análise de resultados de projectos de inovação realizados neste âmbito no ensino da Matemática.

Com este estudo, relativamente prolongado, realizado no contexto de sala de aula, em que se descreve a forma como os alunos trabalharam, encararam e evoluiram perante as propostas que lhes foram apresentadas, pensamos poder contribuir para uma maior compreensão da experiência vivida pelos alunos e pelas professoras num ensino-aprendizagem da Matemática fortemente marcado pelas presentes recomendações curriculares e metodológicas.

C A P Í T U L O 2

REVISÃO DA LITERATURA

Este capítulo sintetiza teorias e resultados de investigações que, de alguma forma, influenciaram este estudo. Compõe-se de três secções: (a) a resolução e formulação de problemas; (b) a calculadora na educação matemática; (c) o trabalho em grupo.

Resolução e Formulação de Problemas

Problemas e Resolução de Problemas

Diferentes interpretações do que se entende por problemas e resolução de problemas têm sido apontadas como uma das causas da dificuldade em sistematizar os resultados das numerosas investigações feitas nesta área.

Para Kantowski (1977) "um indivíduo está perante um problema quando se confronta com uma questão a que não pode dar resposta ou com uma situação que não sabe resolver, usando os conhecimentos imediatamente disponíveis" (p. 163).

Lester (1983) salienta que para que uma dada tarefa constitua um problema para um dado indivíduo, para além de não dispôr de um método imediato de resolução, este deve querer ou precisar de encontrar uma solução e empenhar-se na procura dessa mesma solução.

Também Ponte (1991b) salienta a necessidade de o indivíduo se empenhar activamente na procura da solução do problema. Este autor distingue um problema de um exercício, considerando que neste último apenas é exigida a aplicação de um método de resolução já bem conhecido.

Para Pehkonen (1991a), um problema é uma situação onde uma pessoa é chamada a relacionar, de maneira diferente, alguma informação conhecida de modo a realizar uma dada tarefa. Se é possível identificar de imediato as acções necessárias à execução dessa tarefa, não se trata de um problema mas de um exercício (*routine task*).

Borasi (1986), propõe uma classificação dos vários tipos de problemas a partir de uma análise dos seguintes elementos estruturais: a formulação do problema, o contexto do problema, o conjunto de soluções que o problema admite e as estratégias que podem ser usadas na sua resolução. Tendo em conta estes elementos, Borasi distingue 7 tipos de problemas:

- o exercício, formulado de uma maneira explícita, em que o contexto é inexistente e em que as estratégias de resolução se resumem à aplicação de regras e algoritmos conhecidos que conduzem à solução que, regra geral, é única;

- os problemas de palavras, que de uma forma geral se destinguem dos exercícios na medida em que é clara e explícita a presença do contexto do problema;

- os problemas tipo puzzle, caracterizados por uma formulação e um contexto explícitos, e em que as estratégias de resolução envolvem regra geral a descoberta de um truque que conduz à solução que, nestes problemas, é, regra geral única;

- os problemas que consistem na prova de uma conjectura, em que a formulação é explícita e em que a solução é, regra geral única; neste tipo de problemas o contexto é parcialmente definido na medida em que para a sua resolução é necessário o conhecimento de teoremas e de técnicas;

- os problemas da vida real, em que a formulação e o contexto não são totalmente explícitos no respectivo enunciado sendo, pelo contrário, necessário proceder à recolha de informação complementar; a resolução deste tipo de problemas envolve a criação do modelo matemático que traduz a situação apresentada, a aplicação de técnicas matemáticas na exploração do modelo e a tradução dos resultados obtidos para a situação da vida real a fim de confirmar a validade da solução encontrada;

- as situações problemáticas, em que o contexto é apenas parcialmente explícito e em que as estratégias de resolução, além de envolverem a exploração do contexto, implicam a reformulação do problema e a formulação de novos problemas;

- as situações ainda não problemáticas, em que não há qualquer formulação do problema e em que apenas é feito um convite à exploração do contexto.

Para Pehkonen (1991a), das várias classificações de problemas, considera mais importante a que distingue os problemas abertos dos problemas fechados. Nos problemas fechados é dada uma indicação mais ou menos explícita do que é dado e do que é pedido. Nos problemas abertos, pelo contrário, tal não acontece, desempenhando o aluno um papel importante na sua definição.

Em resumo, da análise das definições dadas pelos autores anteriormente referidos, podemos verificar algumas discordâncias ao nível da definição do que é um problema. Assim, segundo Ponte e Lester, para que uma dada tarefa possa constituir um problema, uma das condições que se deve verificar é o envolvimento activo do indivíduo na procura da solução do problema. Pelo contrário, Kantowski e Pehkonen, não consideram este aspecto. Por outro lado, para alguns destes autores, um exercício não é considerado um problema, enquanto outros consideram os exercícios como problemas de rotina.

A Resolução de Problemas no Ensino da Matemática

Para Schoenfeld (1992), apesar de se poder considerar que há uma certa concordância em assumir a resolução de problemas como o principal objectivo do ensino da Matemática, devido às múltiplas interpretações que são atribuídas à resolução de problemas, este objectivo é pouco claro. Para este autor, é preciso definir claramente quais são os objectivos do ensino da Matemática e a forma como a resolução de problemas se enquadra nesses objectivos.

Segundo Hatfield (1978), o ensino da resolução de problemas pode ser de três tipos: (a) *ensino para*, (b) *ensino acerca de* e (c) *ensino através da* resolução de problemas. O primeiro dá importância à aquisição de técnicas e conhecimentos matemáticos que podem ser úteis na implementação de estratégias para a resolução de problemas. No segundo tipo são realçados procedimentos e estratégias com o objectivo de modelar comportamentos capazes de ajudar os alunos a se tornarem melhores resolvedores de problemas. Finalmente, no ensino *através da* resolução de problemas, todos os conteúdos matemáticos são apresentados no contexto de situações problemáticas.

Para Stanic e Kilpatrick (1989), embora desde a antiguidade os problemas tenham tido um papel central no currículo de Matemática, tal não tem acontecido em relação à resolução de problemas. Segundo estes autores

> "o termo resolução de problemas tornou-se num *slogan* envolvendo diferentes visões do que é a educação, do que é a escola, do que é a Matemática, e das razões porque devemos ensinar Matemática em geral e a resolução de problemas em particular" (p. 1).

Ainda segundo estes autores desde os Egípcios até aos nossos dias podem-se identificar três papéis que a resolução de problemas tem desempenhado no currículo escolar de Matemática: a resolução de problemas como contexto, a resolução de problemas como uma capacidade (*skill*) e a resolução de problemas como uma arte.

A resolução de problemas como contexto baseia-se na ideia de que os problemas e a resolução de problemas são meios para atingir outros fins importantes e pode ser subdividida em pelo menos cinco subtemas: a resolução de problemas como uma justificação, a resolução de problemas como motivação, a resolução de problemas como divertimento, a resolução de problemas como veículo e a resolução de problemas como uma prática.

A resolução de problemas como uma capacidade corresponde a uma visão em que a resolução de problemas é encarada como uma das várias capacidades que o currículo de Matemática deve desenvolver.

A resolução de problemas como uma arte, visão defendida por Pólya (1977, 1981), voltou a colocar nos nossos dias a importância da arte da descoberta já muito antes referida por autores como Euclides e Descartes. Identificando saber Matemática com fazer Matemática, Pólya defende que ao resolver problemas o aluno está a fazer Matemática e que o professor tem um papel chave a desempenhar no desenvolvimento da capacidade de fazer Matemática.

Numa outra abordagem, Ponte (1991b), analisando a forma de encarar a resolução de problemas ao nível dos currículos e ao nível da prática pedagógica dos professores, considera que, a nível nacional e internacional existem pelo menos três perspectivas diferentes.

Uma primeira perspectiva encara um ensino da Matemática "enriquecido" com a resolução de problemas. Assim a resolução de problemas é uma actividade importante que se deve articular com outros conteúdos e actividades que deverão constituir o currículo de Matemática.

Uma segunda perspectiva é a que defende a necessidade de partir de problemas de modo que o conhecimento matemático surja deles e da experiência com a sua resolução.

Uma terceira perspectiva além de proporcionar aos alunos a resolução de vários problemas, considera o seu ensino de uma forma explícita como importante e dá relevo à discussão de heurísticas gerais e específicas, ou ao desenvolvimento nos alunos de capacidades metacognitivas.

Para Pehkonen (1991b), pode-se considerar que hoje não há praticamente nenhum país em que não se desenvolvam esforços no sentido de relacionar de alguma forma a resolução de problemas com o ensino da Matemática escolar. Nos países com uma maior tradição ao nível do ensino da resolução de problemas, é visível uma certa tendência para substituir a visão da resolução de problemas como uma componente separada do currículo por uma visão da resolução de problemas como um método de ensino.

Abrantes (1990), analisa a forma como se tem encarado a resolução de problemas no ensino da Matemática em Portugal nos últimos 20 anos. Assim, na década de setenta, a resolução de problemas tinha um peso muito reduzido. Nessa altura, a principal ênfase era colocada na introdução desde muito cedo de uma visão bastante formalista da Matemática, sendo a resolução de problemas apenas encarada como aplicação de certos tópicos do programa. Nos anos 80, apesar de não ter havido modificações ao nível dos programas de Matemática, as recomendações internacionais de atribuir um papel importante à resolução de problemas no ensino-aprendizagem da Matemática, começam a ter os seus reflexos. Iniciativas como as Olímpíadas da Matemática, a criação de vários clubes de Matemática em algumas escolas Preparatórias e Secundárias onde se destacava, de uma forma geral, a resolução de problemas e a utilização crescente dos computadores, é disto um exemplo. Nessa altura vários professores começaram a introduzir nas suas aulas actividades de resolução de problemas que geralmente assumiram a forma do "problema da semana". Apesar de não se poder falar numa alteração significativa do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, muitos professores começaram a desenvolver algumas actividades de resolução de problemas ao nível da sala de aula. Assim, a resolução de problemas, embora como uma actividade um pouco "marginal" em relação ao processo de ensino-aprendizagem da Matemática, começa a ganhar um certo espaço na prática de muitos professores.

Finalmente, ainda segundo o mesmo autor, nos últimos anos, experiências de inovação curricular, o número crescente de trabalhos de investigação feitos em Portugal em torno da resolução de problemas e o interesse que este tema tem despertado em vários encontros de professores, têm contribuído para que hoje se note um forte movimento no sentido de atribuir à resolução de problemas um papel cada vez mais importante no ensino-aprendizagem da Matemática.

De facto, como refere Ponte (1991a), nos últimos anos a resolução de problemas tem sido objecto de numerosos artigos em que, por exemplo, se discutem enunciados de problemas e a sua resolução, se apresentam propostas de actividades a realizar com os alunos ou se relatam experiências. Podemos assim considerar, que embora na prática lectiva da maioria dos professores a resolução de problemas continue a não ser destacada, este tema é bastante discutido por inúmeros professores. Embora longe de se poder considerar que a resolução de problemas ocupa um lugar importante na maioria das aulas de Matemática, reconhece-se que é cada vez maior o número de professores que integra actividades de resolução de problemas nas suas aulas.

Hoje é possível identificar as três perspectivas indicadas por Ponte (1991b) ao nível de projectos de inovação, no currículo dos novos programas para o Ensino Básico (DGEBS, 1990, 1991a, 1991b), em documentos de reflexão sobre orientações curriculares e em cursos de formação de professores. No entanto, é quase consensual que ao nível da prática pedagógica da maioria dos professores a resolução de problemas ocupa um lugar bem menos importante do que o que lhe tem vindo a ser recomendado a nível nacional e internacional.

Nos novos programas de Matemática para o Ensino Básico é dada maior importância à resolução de problemas do que nos anteriores programas. Assim, para o 1º Ciclo do Ensino Básico podemos considerar que é dominante a primeira perspectiva indicada por Ponte (1991b). Os problemas são encarados quer como situações de exploração e descoberta, quer como aplicações e surgem no centro de um esquema que inclui todas as unidades do programa. Nos programas do 2º e 3º Ciclos, podemos ainda considerar que a resolução de problemas é encarada segundo esta perspectiva mas numa versão bem mais "recuada". Assim, apesar de nos objectivos gerais ser atribuída grande importância à resolução de problemas, ao nível dos conhecimentos esta importância não é realçada, ficando mesmo, em muitos casos, circunscrita a actividades de aplicação ou a uma metodologia a usar quando tal for possível.

Por outro lado, o Projecto MAT789, iniciado em 1988 e dirigido ao 3º Ciclo do Ensino Básico, desenvolveu um currículo

> "... claramente centrado nos processos matemáticos envolvidos na exploração de situações problemáticas... os problemas surgem como situações abertas que é preciso explorar, muitas vezes associados a métodos como o trabalho prático e o trabalho de projecto, e convidando os alunos a uma actividade prolongada que inclui muita discussão e trabalho em pequenos grupos" (Abrantes, 1990, p. 254).

Neste Projecto é bem visível uma visão da resolução de problemas como aspecto central do processo de ensino aprendizagem em Matemática que se pode incluir na segunda perspectiva indicada por Ponte. Também nela se poderá incluir a posição assumida pela Associação de Professores de Matemática (APM, 1988) ao defender que a resolução de problemas deve estar no centro do ensino e da aprendizagem da Matemática. Para a APM

> "... é essencial entender-se que a resolução de problemas não é uma actividade para desenvolver à margem, em paralelo ou como aplicação da aprendizagem curricular da Matemática, mas que esta deve ser encarada e orientada numa perspectiva de resolução de problemas" (p. 34).

Concluindo, com base nas análises dos vários autores anteriormente referidos sobre as perspectivas com que se encara a actividade de resolução de problemas ao nível do processo de ensino-aprendizagem da Matemática, podemos distinguir claramente três blocos.

Num primeiro bloco inclui-se a perspectiva do ensino da resolução de problemas com estatuto de individualidade própria em relação a outros conteúdos do currículo de Matemática. Os problemas são importantes por si mesmos e devem ser ensinados de forma explícita. O ensino de heurísticas gerais ou específicas ou o desenvolvimento de capacidades metacognitivas é considerado particularmente importante. Incluem-se neste bloco o ensino acerca da resolução de problemas como foi definido por Hatfield, a resolução de problemas como uma capacidade identificado por Stanic e Kilpatrick e a terceira perspectiva apontada por Ponte.

Num segundo bloco, o conhecimento matemático surge da experiência com a resolução de problemas. Os problemas são encarados como o eixo organizador do processo de ensino aprendizagem. Neste bloco incluem-se a segunda perspectiva indicada por Ponte e o ensino através da resolução de problemas tal como foi definido por Hatfield. Também a resolução de problemas como uma arte (Stanic e Kilpatrick, 1989), embora a um nível diferente, poderá ser incluída nesta categoria. Assim, apesar do trabalho de Pólya ter sido muitas vezes interpretado como preconizando um ensino quase que algorímico de heurísticas e técnicas, em que a resolução de problemas é uma actividade bem individualizada no processo de ensino aprendizagem da Matemática, a verdade é que a sua visão acerca da importância da resolução de problemas é muito mais abrangente (Stanic e Kilpatrick, 1989, p. 17). Assim, para Pólya (1981), é desenvolvendo a capacidade de resolver problemas que os alunos aprendem a fazer Matemática. O ensino da Matemática que apenas dá ênfase ao desempenho mecânico de operações matemáticas rotineiras é claramente desvalorizado por este autor que sublinha que é, pelo contrário, com a resolução de problemas que os alunos poderão descobrir a Matemática.

Num terceiro bloco, podemos colocar a visão da resolução de problemas como uma componente do currículo de Matemática que valoriza alguns dos aspectos que se consideram mais importantes nesta disciplina. Embora com diferentes graus segundo a importância dos problemas no processo de ensino-aprendizagem da Matemática, podemos incluir neste bloco a primeira perspectiva indicada por Ponte, a resolução de problemas como contexto referida por Kilpatrick e Stanic e o ensino para a resolução de problemas tal como foi considerado por Hatfield.

Finalmente, segundo Pehkonen, sobretudo nos países com uma maior experiência no ensino da resolução de problemas, começa cada vez mais a ganhar força a visão da resolução de problemas como método de ensino, aqui integrada no segundo bloco.

O Ensino da Resolução de Problemas

Em torno do ensino da resolução de problemas, várias têm sido as posições defendidas. Uma das mais frequentemente recomendada, tem sido a do ensino de heurísticas e de métodos heurísticos. Como refere Fernandes (1992) vários autores defendem que

"...as heurísticas e os métodos heurísticos estão intrinsecamente associados ao ensino da resolução de problemas porque, entre outras características, parecem motivar os alunos, são relevantes do ponto de vista pedagógico, promovem a aprendizagem activa e podem ajudar a melhorar os processos de ensino e de aprendizagem da resolução de problemas" (p. 47).

As heurísticas podem ser gerais ou específicas conforme a possibilidade de se aplicarem a um maior ou menor número de problemas.

Para Pólya (1977), o ensino da resolução de problemas deve proporcionar uma larga experiência com a sua resolução e uma análise dos processos que conduzem à sua solução. Pólya propôs um modelo que considerava quatro fases:

1ª. Compreensão do problema

2ª. Estabelecimento dum plano

3ª. Execução do plano

4ª. Retrospecção

Compreender um problema é interpretar a informação fornecida de forma que ela possa fazer sentido para o aluno. A compreensão do problema envolve o entendimento verbal e a identificação das partes principais do problema: as incógnitas, os dados e as condicionantes. Mas é evidente que a compreensão do problema aumenta à medida que o aluno actua sobre a situação.

Estabelecer um plano é formular, pelo menos de uma forma geral, qual o caminho a seguir para obter a solução do problema. Nesta fase, é importante conseguir seleccionar ou inventar uma estratégia de resolução do problema.

Executar o plano é efectuar todo o trabalho identificado na fase anterior. O plano em si é apenas um roteiro geral.

Agora, é importante segui-lo, verificar todos os passos e ter o cuidado de não perder a globalidade do problema.

Finalmente, o aluno deve fazer a retrospecção da resolução do problema. Assim, em primeiro lugar, deve testar a solução encontrada e caso esta não verifique o problema, ensaiar uma nova abordagem. Mas mesmo que a solução encontrada seja correcta é sempre possível aumentar a compreensão do problema procurando, por exemplo, generalizações ou verificando se alterações nas condições iniciais do problema afectam a solução.

Segundo Pólya, para que o aluno possa implementar um plano, é fundamental o uso de heurísticas e ao trabalhar na resolução de problemas estas devem ser explicitamente ensinadas.

Como refere Fernandes (1992), muitos têm sido os trabalhos de investigação que reflectem uma preocupação em avaliar efeitos de métodos heurísticos de ensino e de heurísticas no desenvolvimento da capacidade de os alunos resolverem problemas. Este autor selecciona 16 estudos (um dos quais é uma meta-análise que analisa 33 investigações) todos eles desenvolvidos por investigadores matemáticos, que se debruçam sobre a resolução de problemas em Matemática e que investigam processos usados na resolução de problemas, o ensino da resolução de problemas através dos métodos heurísticos, o ensino de estratégias de resolução de problemas ou uma combinação destes aspectos. Segundo Fernandes a análise destes estudos

> "...permite concluir que as heurísticas, gerais e específicas, podem ser ensinadas e aprendidas e contribuem para melhorar o desempenho dos alunos na resolução de problemas. Mesmo nas investigações quantitativas em que não foram detectadas

diferenças estatisticamente significativas, os investigadores reflectem que os estudantes que foram ensinados a utilizar heurísticas, utilizaram-nas mais frequentemente, resolveram mais problemas correctamente e revelaram comportamentos mais susceptíveis de conduzir ao sucessso em resolução de problemas do que os alunos que não foram ensinados a utilizá-las"(p. 69-70).

Ainda como conclusões destes estudos, Fernandes aponta o facto de que, sobretudo no ensino básico, os métodos heurísticos de ensino parecem ser eficazes, mas que, de uma forma geral, é pouco evidente que os alunos consigam usar as estratégias ensinadas noutros contextos ou por períodos alargados de tempo.

Detendo-se também nesta questão, Schoenfeld (1985) considera que a importância dada ao ensino da resolução de problemas via heurísticas se baseia sobretudo na aceitação dos seguintes pressupostos:

1. Professores, alunos universitários e alunos em pós-graduações, resolvem milhares e milhares de problemas. Ao longo da experiência que vão acumulando na resolução de diversos problemas, acabam por coleccionar uma série de estratégias pessoais.

2. Apesar das estratégias referidas no ponto anterior serem pessoais, há uma certa homogeneidade na forma de resolver o mesmo problema.

3. Por introspecção ou por observação da forma como eles resolvem um grande número de problemas é possível identificar e caracterizar as heurísticas que usam.

4. Identificadas as principais heurísticas usadas pelos especialistas na resolução de problemas, elas devem ser explicitamente ensinadas aos alunos.

No entanto, Schoenfeld considera que estes pressupostos não têm produzido os efeitos que se esperariam. Apesar do grande número de investigações que tiveram como objecto o estudo do ensino da resolução de problemas via heurísticas, as conclusões a que chegaram ficaram aquém do que se esperava. Assim, apesar de em alguns estudos se ter concluído que o uso de heurísticas estava relacionado positivamente com os resultados obtidos em testes de resolução de problemas, os efeitos observados eram bem mais pequenos que os esperados. Por outro lado, outros estudos revelaram que as heurísticas gerais não eram bem transferidas para novas situações.

Para Schoenfeld, o facto de o ensino de heurísticas não se ter revelado tão eficaz como o esperado, deve-se à falta de uma caracterização precisa e detalhada de como se devem ensinar no processo de resolução de problemas e ao facto de que aprender a usar heurísticas não é suficiente para resolver correctamente problemas. Assim, a escolha da estratégia adequada, a importância da tomada de decisões de controlo e o facto de na maior parte dos estudos a caracterização das heurísticas não ser suficientemente prescritiva, leva a que os efeitos produzidos pelo ensino da resolução de problemas via heurísticas fiquem aquém dos esperados.

Schoenfeld (1992) aponta a importância de, no ensino da resolução de problemas, se desenvolverem capacidades metacognitivas. Segundo ele, a investigação feita nos anos 70 nas áreas da educação matemática e da inteligência artificial, convergem em considerar os processos metacogonitivos como de grande importância. Para este autor, o conhecimento acerca dos processos de pensamento, o controlo desses processos e as concepções, são categorias intelectuais distintas que fazem parte da metacognição.

De uma forma geral, os defensores do ensino de aspectos metacognitivos, defendem que os alunos melhoram a qualidade de decisões enquanto estão a resolver problemas, tomam consciência das estratégias, técnicas, conceitos e processos matemáticos que ajudam a resolvê-los e que desenvolvem capacidades de utilização eficaz desses conhecimentos e técnicas (Saraiva, 1991).

Como resultado da sua experiência em cursos de resolução de problemas, Schoenfeld (1992) considera que quando os alunos resolvem problemas em pequenos grupos, questioná-los sobre o que estão a fazer, os motivos porque o fazem e como o trabalho que estão a desenvolver os pode ajudar, aumenta o seu sucesso na resolução de problemas.

Também num estudo realizado por Lester e Garofalo (citado por Schoenfeld, 1992), se pôde concluir que os processos metacognitivos se desenvolvem interactivamente com uma compreensão de conceitos matemáticos usados na resolução de problemas.

Schoenfeld (citado por Fernandes, 1992) sistematiza quatro técnicas que poderão ser usadas para desenvolver as capacidades metacognitivas dos alunos. A primeira técnica consiste em mostrar aos alunos filmes vídeo, onde se vê outros alunos a resolver problemas. Na segunda técnica o professor deve "representar" comportamentos e processos que habitualmente surgem quando se tenta resolver um problema. Na terceira técnica, a ênfase é colocada no controlo e auto-regulação dos conhecimentos, aliada a uma discussão com toda a turma, das convicções dos alunos acerca da Matemática. Finalmente, na quarta técnica, os alunos devem resolver problemas em pequenos grupos, o que permite ao professor observar o comportamento dos alunos, discutir questões em torno da resolução de problemas e questionar o trabalho que desenvolvem.

Mas, como refere Schoenfeld (1992), apesar do papel importante que a metacognição poderá ter no ensino da resolução de problemas, é necessário clarificar o que se entende por contexto de ensino adequado, e construir materiais que possam servir de modelo e de guia para os professores, antes que este tipo de ensino se possa generalizar. Neste sentido, vários investigadores têm desenvolvido modelos de resolução de problemas em que se consideram os aspectos metacognitivos. (Pehkonen, 1991b).

Lester (1980), reflectindo sobre o ensino da resolução de problemas, considera que para além de seguir o modelo de Pólya se podem dar algumas sugestões adicionais. Assim, uma primeira sugestão consiste em proporcionar aos alunos uma grande prática na resolução de problemas. Os problemas devem ser variados (ter mais de uma solução, ou ser impossíveis, poderem ser resolvidos por vários processos, alguns deles estarem relacionados com outros, etc). O professor deve sobretudo encorajar os alunos a resolverem problemas e de vez em quando organizar uma discussão com toda a turma sobre as tentativas de resolução do mesmo problema.

Outra sugestão é a do desenvolvimento de "capacidades instrumentais específicas" entendidas como técnicas facilitadoras do uso de estratégias mais gerais. Por exemplo, para ensinar a estratégia "construir uma tabela", o professor pode começar por mostrar como a construção de uma tabela pode ajudar a resolver determinado problema. O professor deve realçar em que medida a tabela que construiu ajuda a organizar e interpretar a informação. Mais tarde, os alunos devem praticar a leitura e contrução de tabelas e resolver problemas em que a construção de uma tabela facilite a determinação da solução.

Outra sugestão apresentada por Lester consiste na demonstração feita pelo professor da forma de resolver determinado problema. Assim, os alunos vão-se apercebendo de procedimentos e estratégias que podem ser usados na resolução de problemas. Com o tempo, espera-se que eles venham a usar esses processos e estratégias para resolverem problemas.

Segundo Lester, todas estas sugestões se complementam e provavelmente a decisão mais acertada é usar uma combinação de todas elas.

Para Stacey (1991), no ensino da resolução de problemas é indispensável ter em conta os seguintes três aspectos:

- proporcionar experiência na resolução de problemas que sejam desafiadores;

- proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o trabalho que vão desenvolvendo;

- apresentar estratégias simples de resolução de problemas.

Para esta autora, as heurísticas não devem ser ensinadas explicitamente, mas sim implicitamente através da prática na resolução de problemas. Por outro lado salienta o papel do professor no sentido de incentivar um ambiente de trabalho que envolva activamente os aluno. Como refere:

> "Na escola, os alunos esperam fazer, não pensar. Logo o professor precisa de proporcionar um contexto activo para reflexão" (p. 11).

Em resumo, podemos considerar que o ensino da resolução de problemas via heurísticas, tem vindo a assumir menos importância do que anteriormente lhe era reservado. Embora o ensino de heurísticas quer explícito, quer implícito, continue a ser recomendado, têm-se realçado outros aspectos a ter em conta no ensino da resolução de problemas. O desenvolvimento de capacidades metacognitivas tem sido apontado por vários autores como fundamental para ajudar os alunos a ter sucesso na resolução de problemas. A resolução de problemas em pequenos grupos, a discussão entre os alunos e o professor em que se analisem a resolução de vários problemas, a criação na sala de aula de um "clima de trabalho adequado" e a necessidade de proporcionar aos alunos experiência na resolução de uma grande variedade de problemas, têm também sido realçados.

Formulação de Problemas

Para Kilpatrick (1987), a formulação de problemas além de ser uma importante área ainda pouco explorada, deveria ser vista como um objectivo e meio de ensino. Assim, na educação matemática de cada aluno, a experiência de criar e descobrir problemas deveria ser uma importante componente.

Para Mason (1991), o facto de um aluno ser desafiado a formular o seu próprio problema, proporciona condições de um maior envolvimento e consequentemente um maior entusiasmo na sua resolução. Nas aulas de Matemática deve ser dada especial atenção à formulação de problemas, devendo ser proporcionadas aos alunos numerosas experiências na formulação de problemas e também oportunidades de observar o professor a formular problemas.

Também Schwartz (1992) considera como muito importante uma formação que permita aos jovens questionar as diferentes situações que se lhes deparam. Assim, a formulação de problemas é importante pois desenvolve nos alunos o gosto de explorar e analisar conjecturas, facilitando uma atitude crítica e de investigação que são componentes muito importantes da sua educação.

Para Greeno (citado por Kilpatrick, 1987), há alguma evidência de que na formulação de problemas são necessários conhecimentos tão vastos como os requeridos pela resolução de problemas. No entanto, tais conhecimentos são usados de maneiras diferentes.

Kilpatrick (1987) defende que nas diferentes fases da resolução de um problema ocorre formulação de problemas. Assim, perante qualquer problema, há sempre uma reformulação do enunciado de forma a que este possa ser entendido pelo indivíduo que se propõe resolvê-lo. Por outro lado, mesmo nos problemas em que a informação dada é explícita, para a sua resolução é muitas vezes necessário recorrer a informação do senso comum que permite colmatar a diferença entre a formulação matemática e a situação em que se insere o problema. Por outro lado, os problemas podem constituir uma fonte de novos problemas e parece haver duas fases, durante o processo de resolução de problemas, em que novos problemas podem ser criados. Assim, durante a resolução podem ser alteradas algumas das condições do problema criando novos problemas. Também após a resolução de um problema, pode-se querer analisar em que medida a solução pode ser afectada por modificações no enunciado inicial. Também na análise de possíveis extensões de um problema se está perante uma actividade de formulação. Nos problemas da vida real, a formulação do problema em termos matemáticos não está feita. É o indivíduo que ao ser confrontado com a situação, reformula o problema de modo a construir um modelo matemático adequado. Também na exploração de situações problemáticas os alunos podem estabelecer várias relações e formular diferentes problemas.

Também para Brown e Walter (1990) há uma grande relação entre a resolução e a formulação de problemas. Assim, a resolução de um problema requer alguma reformulação do enunciado que é apresentado e o verdadeiro significado da solução de um problema muitas vezes só é percebido depois de se estabelecerem e analisarem outras perguntas.

Para Mason (1991), é fundamental a apresentação de situações abertas que desafiem alunos a colocar e a refinar as questões que a sua análise lhes vai suscitando. Para ajudar os alunos a melhorar as questões que formulam, este autor considera que há bastantes técnicas a que o professor pode recorrer. Por exemplo, a partir de determinada regra ou técnica tentar fazer generalizações ou caracterizar as situações a que elas se podem aplicar, incentivar os alunos a generalizar regularidades e a relacionar padrões ou a perceber as implicações de determinada alteração num enunciado matemático. Por outro lado o ambiente de trabalho que se estabelece na sala de aula é muito importante e o professor tem também aqui um papel determinante.

Este aspecto também é realçado por Kilpatrick (1987). Como afirma, "Para empenhar os alunos no acto criativo de formular problemas, é necessário um clima em que a exploração de ideias seja encorajada" (p. 140). O trabalho em pequenos grupos também pode favorecer o desenvolvimento da capacidade de formular problemas.

Este autor considera que a maior parte das questões que se colocam em torno da formulação de problemas está em aberto. No entanto, investigações referidas neste artigo parecem sugerir que a criatividade e a flexibilidade são desenvolvidas quando se trabalha na formulação de problemas e que a formulação de problemas influencia positivamente a capacidade de resolver problemas.

Dois estudos realizados em Portugal analisaram questões relacionadas com a formulação de problemas. Moreira (1989), procurou identificar os efeitos da utilização da folha de cálculo electrónica no desenvolvimento da capacidade de formular problemas. Durante três meses, 18 alunos do 6º ano de escolaridade que constituiam o grupo experimental trabalharam em pequenos grupos na resolução de actividades com o auxílio da folha de cálculo electrónica. Em algumas dessas actividades, era-lhes pedida a formulação de um problema. Como principais conclusões em relação à formulação de problemas, a autora indica as seguintes:

- pôr o problema do avesso, ou seja; fazer um exercício e depois pensar quais serão os dados a não fornecer de modo a que não se inviabilize a sua resolução, parece contribuir para a construção de um modelo da situação e para a explicitação desse modelo;

- o interesse dos alunos pelas actividades de formulação de problemas foi grande;

- de uma forma geral os problemas inventados pelos alunos têm uma extrutura idêntica aos problemas das fichas. No entanto, em muitas das situações, o que era pedido aos alunos, era a formulação de um problema semelhante a outros apresentados nas fichas;

- comparando as formulações de problemas que os alunos apresentaram no pré-teste com as apresentadas no pós-teste, foi visível um progresso no sentido de os alunos formularem enunciados que eram de facto problemas.

Num outro estudo, Saraiva (1991), analisou as potencialidades educativas de uma versão do programa LOGO.GEOMETRIA, especialmente preparada para apoiar a aprendizagem da Geometria Vectorial e Analítica. Entre outros aspectos, propunha-se analisar as potencialidades deste programa, utilizado numa perspectiva pedagógica de valorização de actividades de exploração e descoberta, para promover nos alunos a capacidade de formular problemas. Este estudo foi realizado ao longo de 10 aulas de duas horas com duas turmas do 10º ano. Como principais conclusões em relação à formulação de problemas, são indicadas as seguintes:

- os alunos manifestaram uma certa tendência para formular enunciados de simples aplicação de regras e de feitura de cálculos;

- grande parte dos problemas formulados pelos alunos não foram pensados para serem resolvidos com o LOGO.GEOMETRIA. No entanto, em muitos casos, a formulação de problemas foi feita em aulas em que os alunos não trabalhavam com o computador;

- O LOGO.GEOMETRIA permitiu que alguns alunos apresentassem enunciados de problemas originais e imaginativos, que conciliavam aspectos geométricos, vectoriais e numéricos.

Em resumo, podemos considerar que apesar do reduzido número de estudos realizados em torno da formulação de problemas, vários autores lhe conferem um papel bastante importante no processo de ensino-aprendizagem da Matemática.

Kilpatrick (1987) identifica detalhadamente situações em que pode ocorrer a formulação de problemas: em diversas fase da resolução de um problema, no estudo de extensões de um problema e na exploração de situações problemáticas e de problemas da vida real.

Fazer generalizações de regras e de técnicas, caracterizar as situações a que elas se podem aplicar, incentivar os alunos a generalizar regularidades e a relacionarem padrões ou a perceber as implicações de determinada alteração num enunciado matemático, são algumas sugestões que podem ajudar a desenvolver a capacidade de formular problemas. É também fundamental estabelecer, na sala de aula, um ambiente de trabalho em que seja incentivada a exploração de ideias.

As poucas investigações feitas nesta área parecem sugerir que a formulação de problemas desenvolve a criatividade e a flexibilidade e influencia positivamente a capacidade de resolver problemas. Dois estudos realizados em Portugal sugerem que a utilização do computador, numa perspectiva pedagógica que valoriza actividades de exploração e descoberta, leva os alunos a manifestar grande interesse pelas actividades de formulação de problemas e facilita, em alguns deles, a formulação de problemas originais e imaginativos.

Avaliação da Resolução de Problemas

Com a importância que nos últimos anos se tem atribuído à resolução de problemas, surgiram naturalmente uma série de questões relacionadas com a sua avaliação.

Para Silver e Kilpatrick (1989), das várias funções da avaliação, duas delas têm sido relativamente pouco referidas: 1) a avaliação como reguladora do processo de ensino e 2) a avaliação focando o que de facto se valoriza. Assim, como função reguladora, a avaliação deve fornecer ao professor informação que lhe permita (re)orientar a forma como deve prosseguir o ensino da resolução de problemas. Para estes autores, as sugestões avançadas por Glaser (citado por Silver e Kilpatrick, 1989) de recorrer à ajuda da psicologia cognitiva, nomeadamente no sentido de fornecer informação sobre os aspectos que são automáticos e de proporcionar informação detalhada em relação às estruturas cognitivas e às capacidades associadas a um bom desempenho no domínio que é testado, poderão ser úteis e exploradas em futuras investigações.

Por outro lado, como referem estes autores, se se valoriza a resolução de problemas, a avaliação deve traduzir essa importância. Tal não tem sido a prática seguida em muitas salas de aula, pois, apesar da importância que se afirma dar à resolução de problemas, em grande parte dos testes a ênfase é colocada na avaliação do domínio de regras e técnicas de cálculo. A pergunta que tantas vezes os alunos fazem "isso sai no teste?" quer muitas das vezes dizer "isso é importante?".

Para Clarles, Lester e O'Daffer (1987), a avaliação do progresso dos alunos deve ter em conta tanto a capacidade em usar uma série de capacidades e estratégias, como as atitudes e concepções que têm em relação à resolução de problemas. Ao escolher uma técnica de avaliação da resolução de problemas, o professor deverá ter em conta aspectos como: o tipo de problemas, o número de alunos que tem de avaliar, o tempo de que pode dispor para a avaliação, a sua experiência no ensino e na avaliação da resolução de problemas e a forma como pretende usar os resultados da avaliação.

Estes autores descrevem quatro técnicas para avaliar o desempenho na resolução de problemas: 1) observar e questionar; 2) usar relatórios e inventários; 3) usar uma escala de classificação; 4) usar testes de escolha múltipla e *completion tests*.

Ao observar e questionar os alunos enquanto resolvem problemas, o professor pode recolher importantes informações acerca do desempenho dos alunos, das suas atitudes e concepções. Pode também fazer um registo sistemático das observações feitas ou usar um instrumento mais estruturado tipo *checklist*.

Outra técnica consiste em pedir aos alunos que elaborem um relatório sobre a sua experiência em relação à resolução de problemas ou que assinalem numa lista de itens (inventário) quais os que melhor traduzem a sua atitude em relação à resolução de problemas ou em relação a um problema em particular.

Usar uma escala é uma técnica muito comum para a classificação do trabalho escrito do aluno. No entanto, consideram estes autores, a ênfase dada pela escala deve ser colocada no processo de resolução. Podem usar-se escalas analíticas ou holísticas focadas. Em qualquer dos casos, este tipo de classificação baseia-se numa escala que à partida define critérios relativos ao processo de resolução de problemas e que devem ser observados pelo avaliador. Uma escala analítica permite atribuir uma pontuação a cada uma das fases do processo de resolução de problemas. Pelo contrário, uma escala de classificação holística focada atribui uma única pontuação a cada problema.

Finalmente, os testes de resposta múltipla e os *completion tests* (constituídos por itens a que se responde ao identificar a informação pedida), são outra técnica de que se pode dispor para avaliar a resolução de problemas.

Fernandes (1988), utilizou uma adaptação de uma escala de classificação holística focada, desenvolvida pelos autores referidos anteriormente, na classificassão de problemas de processo resolvidos por futuros professores do ensino básico. De uma forma geral, a aplicação desta escala revelou que ela era adaptável à maioria dos problemas. No entanto, Fernandes considera que a aplicação dos critérios definidos na escala não tornavam simples a avaliação de alguns problemas, nomeadamente os resolvidos com a estratégia Testar uma Conjectura. Por outro lado, tendo em atenção a consistência da escala, a sua aplicação revelou a necessidade de identificar resoluções que constituissem uma referência para cada classificação nela prevista. Assim, antes da recolha de dados, Fernandes recomenda que se leiam previamente todas as respostas e se proceda a uma pré-testagem dos items. Finalmente, este autor recomenda que cada item seja classificado por pelo menos duas pessoas (p. 121-122).

Os investigadores do California Assessment Program (citado em Fernandes, 1992), desenvolveram escalas de avaliação de resolução de problemas "de forma a minimizar possíveis inconsistências resultantes da inadaquação das escalas de classificação" (p. 80). Para tal, para além de utilizarem uma escala geral, utilizaram escalas específicas por problema. Para desenvolverem estas escalas seguiram as seguintes quatro fases: 1) análise dos problema e das soluções desejáveis; 2) classificar, de uma forma holística, um grande número de soluções para cada problema usando uma escala de 0 a 6,; 3) descrever as características das soluções a que foi atribuída determinada pontuação; 4) discutir estas descrições.

No entanto, Kilpatrick (1992) considera que aos esquemas de classificação holística, que de uma forma geral se baseiam nas quatro fases do modelo de resolução de problemas de Pólya, se podem levantar algumas questões. Como afirma:

> "Na medida em que esses esquemas são aplicados aos processos que os alunos parecem usar quando resolvem problemas pensando alto, os esquemas podem ajudar os professores e os investigadores a perceberem como um aluno está a abordar um problema. Mas é difícil ver o valor de tais esquemas quando os problemas são rotineiros e o avaliador está a examinar o trabalho escrito dos alunos, procurando provas destes terem entendido o problema, ou terem esboçado um plano. Qualquer inferência acerca do processo que um aluno está a usar será, de algum modo duvidosa e necessita de ser confirmada através de outras informações" (p. 40).

Por outro lado Kilpatrick, contesta a preocupação exagerada na procura de uma forma de classificação objectiva e de alta fiabilidade. Citando Norman Frederikson realça:

> "Os testes eficientes tendem a eliminar testes menos eficientes deixando muitas capacidades importantes por testar - e por ensinar. Uma tarefa importante para educadores e psicólogos é desenvolver instrumentos que reflictam melhor todo o domínio dos objectivos educacionais e encontrar maneiras de os utilizar na melhoria do processo educacional" (p. 41).

Também no Projecto Hewet (Lange Jzn, 1987), a grande preocupação com a objectividade da avaliação é discutida. Um dos grandes quatro grandes princípios da avaliação seguida neste projecto afirma:

> "A qualidade de um teste não é definida pelo facto de poder ser classificado objectivamente. Aceitamos que, dentro de certos limites, juízos de pessoas competentes e independentes podem classificar de maneira diferente" (p. 180).

Para Kilpatrick (1992) uma das formas de avaliação mais promissora "é tratar a resolução de um problema como uma tarefa de composição escrita ... em que a tarefa do aluno é, não só encontrar uma solução que seja pessoalmente satisfatória, mas descrever por extenso uma solução que satisfaça um leitor" (p. 42-43). Trata-se, pois de dar ênfase não ao processo de pensamento do momento, mas sim, à análise do que já fez e da construção de uma comunicação clara sobre isso. Assim, para além de ser possível distinguir o desempenho mecânico de um nível mais profundo de compreensão, realça-se a relação Matemática/comunicação. De facto, segundo Kilpatrick, a avaliação da resolução de problemas em Matemática deve centrar-se na comunicação pois o aluno só resolve verdadeiramente um problema se consegue comunicar aquilo que fez.

No seminário "Avaliação: uma questão a enfrentar" organizado pela APM (1991) um grupo de trabalho debruçou-se sobre a avaliação e resolução de problemas em Matemática. De entre as conclusões apontadas, destacamos a necessidade de:

- obter produtos de natureza diversificada, pois apesar de se realçar a importância dos processos avalia-se a partir de produtos;

- avaliar de um modo holístico o trabalho dos alunos ou grupos de alunos. Uma lista de capacidades ou atitudes pode auxiliar a avaliação da evolução individual de cada aluno.

- o professor dispor de registos, preferencialmente escritos. Assim, sempre que se trate de um trabalho mais prolongado, o professor pode, por exemplo pedir um relatório, ou no caso de um problema resolvido na sala de aula, de uma folha em que o aluno regista o trabalho desenvolvido. Quando a actividade é essencialmente não escrita é importante registar o resultado das observações do trabalho dos alunos (p. 48-49).

Resumindo, provavelmente devido à complexidade das questões relacionadas com a avaliação da resolução de problemas, as posições defendidas por vários autores são bem diferentes. Assim, enquanto que a objectividade da avaliação é uma questão importante para uns, outros assumem à partida um certo grau de subjectividade. Por outro lado, avaliar o trabalho dos alunos de uma forma analítica ou holística é também um aspecto em que não há concordância. No entanto, podemos inferir da literatura que nos últimos anos a avaliação holística tem vindo a reunir um número crescente de defensores. Este é o caso de Kilpatrick ao encarar a resolução de um problema "como uma tarefa de composição". Também no seminário organizado pela APM foi recomendado que a avaliação da resolução de problemas seja feita de uma forma holística.

A Calculadora na Educação Matemática

Em 1974 o NCTM acentuava a necessidade de que a calculadora fosse usada no processo de ensino-aprendizagem da Matemática. No entanto, apesar desta indicação ter sido reforçada por diferentes autores, a introdução da calculadora nas aulas de Matemática está longe de ser uma realidade (Hembree e Dessart, 1986).

Além do seu valor ao nível do cálculo, a calculadora foi considerada como um instrumento capaz de ajudar o ensino de algoritmos, facilitar o desenvolvimento de conceitos, reduzir o número de factos a serem memorizados, incentivar actividades de descoberta, aumentar a criatividade. Permite ainda que o trabalho seja mais motivante para os alunos (Suydam, citada em Hembree e Dessart, 1986).

No Grupo de Trabalho Internacional sobre Calculadoras, em que participaram educadores matemáticos de 16 países, Suydam (1980) refere que muitos dos professores de Matemática desses países manifestam uma certa relutância em utilizar a calculadora ao nível da sala de aula. Sobretudo nos primeiros anos do ensino básico há uma grande resistência à sua utilização. Sintetizando os argumentos a favor e contra a utilização da calculadora ao nível do ensino-aprendizagem da Matemática, esta autora refere:

- a utilização da calculadora permite, por exemplo, deslocar a ênfase dos cálculos rotineiros para a exploração de ideias matemáticas e para a resolução de problemas, usar exemplos e problemas com dados mais reais, dar suporte aos processos algorítmicos e heurísticos, aumentar a motivação, permitir aprendizagem por descoberta;

- por outro lado, o receio de que se possam perder capacidades de cálculo feitas com papel e lápis é dominante para os que defendem a não utilização da calculadora. Assim, entre os argumentos contra a utilização da calculadora podem-se indicar o receio de que os resultados dos cálculos não sejam criticados, que a sua utilização sistemática possa prejudicar o desenvolvimento de capacidades nas crianças, que possa reforçar a ideia de que a Matemática é cálculo e que possa diminuir a compreensão dos algoritmos usados no cálculo.

O número de investigações feitas em relação à utilização da calculadora, varia muito nos diferentes países. Segundo Suydam, a maioria das investigações foram feitas nos Estados Unidos, em Inglaterra e na Suécia. Em Inglaterra, pode-se considerar que tem havido um grande número de estudos e de experiências realizados em torno da calculadora. Neste país, a maior parte dos estudos tem-se preocupado em recolher informação acerca de experiências bastante informais e exploratórias que permitam dar indicações do que pode ser ensinado com a calculadora e desenvolver pequenas unidades de ensino. Na Suécia os objectivos das investigações têm sido semelhantes. Presentemente, há neste país um vasto programa de investigação que envolve: o estudo dos efeitos da utilização da calculadora como ajuda de cálculo, como instrumento de mudança dos métodos usados no currículo e como instrumento de mudança dos conteúdos curriculares. Nos Estados Unidos, mais de 100 estudos foram realizados nesta área. Na sua grande maioria, estes estudos comparavam o desempenho de grupos de alunos que usavam a calculadora com outros que não a utilizavam. De uma forma geral, todos estes estudos concluiram que a utilização da calculadora proporciona um melhor desempenho geral nos alunos. No entanto, também se realizaram vários estudos que tinham como principal objectivo estudar a introdução da calculadora ao nível do currículo e desenvolver materiais de acordo com esta ideia.

Finalmente, Suydam refere ainda que dos estudos realizados em diferentes países, se pôde concluir que a utilização da calculadora não origina piores desempenhos dos alunos, nomeadamente ao nível das capacidades básicas de cálculo.

Hembree e Dessart (1986) fizeram uma meta-análise de 79 estudos realizados nos Estados Unidos da América que procuravam analisar implicações da utilização da calculadora na aprendizagem da Matemática, nomeadamente em relação à aquisição de capacidades básicas de cálculo, de conceitos e à capacidade de resolução de problemas. Para além disto, também analisavam implicações da utilização da calculadora ao nível das atitudes dos alunos. Estes estudos envolveram alunos de todos os níveis de escolaridade básica e secundária e cada um analisava uma amostra de pelo menos 10 alunos ou 5 turmas, no caso de a turma ser tomada como unidade de análise. Como conclusões gerais, os resultados destes estudos indicam que a utilização da calculadora favorece o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas e do domínio de técnicas de cálculo. Por outro lado, desenvolve nos alunos uma atitude mais positiva em relação à Matemática e em relação a si próprios. Hembree e

Dessart consideram que as comparações entre alunos que utilizam calculadora e os que não a utilizam já foi suficientemente investigada e que a questão da utilização, ou não, da calculadora está respondida afirmativamente. Para eles, o campo de investigação deve deslocar-se no sentido de desenvolver materiais pedagógicos que contemplem a utilização da calculadora.

Szetela e Super (1987) durante um ano lectivo, realizaram um estudo que envolveu 42 turmas do 7º ano. Este estudo tinha como principais objectivos estudar os efeitos de um ensino que dava ênfase a estratégias de resolução de problemas e compará-los com a utilização ou não da calculadora. As turmas foram agrupadas da seguinte forma:

. em 10 turmas foi desenvolvido um programa de ensino de estratégias de resolução de problemas;

. em 14 turmas foi desenvolvido o mesmo programa mas os alunos usavam a calculadora;

. as restantes 18 turmas constituiram o grupo de controle das anteriores.

Aos professores das 24 turmas que constituiam o grupo experimental foi proporcionado um acompanhamento por parte dos investigadores, com o objectivo de apoiar o processo de implementação dos materiais produzidos para serem usados na sala de aula e de ajudar a estabelecer um ambiente de trabalho positivo em relação à resolução de problemas. Estes professores tiveram duas sessões de trabalho que visavam a resolução e discussão de problemas segundo o modelo de Pólya. Com este estudo pôde-se concluir que o grupo experimental melhorou significativamente a capacidade de resolução de problemas em dois dos cinco testes de resolução de problemas e que os alunos que usaram a calculadora revelaram atitudes significativamente mais positivas em relação à resolução de problemas. Por outro lado, estes alunos revelaram capacidades idênticas aos dos outros grupos ao nível das capacidades de cálculo com papel e lápis. No entanto, apesar do desempenho geral do grupo experimental ser superior ao do grupo de controlo, as diferenças observadas ficaram aquém do que se esperava.

Dos estudos anteriormente referidos, realçamos dois aspectos. Em primeiro lugar, podemos inferir que de uma preocupação inicial em avaliar as implicações da utilização da calculadora ao nível das capacidades básicas de cálculo, as questões a investigar se alargaram a outros aspectos como a resolução de problemas e as atitudes dos alunos face à Matemática. Em segundo lugar, a unanimidade em recomendar a utilização da calculadora em todos os anos de escolaridade.

As grandes questões que se colocam neste momento, situam-se ao nível de realizar e avaliar experiências em que as formas de trabalho desenvolvidas com os alunos explorem de uma forma mais organizada as potencialidades da calculadora e que estudem as implicações da sua utilização na mudança do currículo de Matemática (Suydam, 1980; Hembree e Dessart, 1986).

Perspectivando a relação entre a introdução da calculadora e as decorrentes alterações curriculartes, Bell, Costello e Kuchemann (1983) consideram três possibilidades:

1. Introdução da calculadora sem planear modificações ao nível do processo de ensino-aprendizagem;

2. Sem modificar os objectivos curriculares, usar materiais e métodos de ensino que tenham em conta a calculadora como um instrumento auxiliar do ensino da Matemática;

3. Modificar o currículo de acordo com a utilização da calculadora.

Focando as possibilidades 2 e 3, Reys (1989) argumenta que "o uso da calculadora como ferramenta básica de cálculo proporciona, a professores e estudantes, o tempo necessário para focar o esforço e a concentração dos estudantes na compreensão conceptual e no pensamento crítico" (p. 168).

Para Ponte (1989) "O uso das calculadoras não anuncia o fim do cálculo, mas implica que o cálculo seja encarado de uma outra maneira. Estimula novas formas de trabalhar favorecendo uma atitude mais prática e experimental na Matemática. Dá um relevo importante à actividade de conjecturação e à resolução de problemas, mas exige uma cuidada formação crítica dos alunos" (p. 2). Assim, segundo este autor, a utilização educativa das calculadoras não é uma alteração que apenas implique pequenos reajustamentos do programa - pelo contrário, ela deve traduzir uma profunda mudança ao nível das concepções e da prática pedagógica da disciplina de Matemática.

Em Portugal, realizaram-se recentemente três estudos em que se investigaram questões relacionadas com a calculadora. Todos eles tiveram como base programas de formação contínua de professores de Matemática com a duração de um ano lectivo.

O estudo realizado por Silva (1991) incide sobre as vivências de professoras do 2º Ciclo do Ensino Básico na relação e integração da calculadora no processo de ensino-aprendizagem.

De entre as conclusões deste estudo, destacamos: as professoras que participaram no programa de formação evidenciaram boas ou razoáveis relações com a calculadora e utilizaram-na com regularidade ou sistematicamente nas suas aulas. Estas professoras têm uma visão da calculadora como um recurso que estimula a actividade matemática. No entanto, apesar de terem uma visão da importância do cálculo mais ampla em que realçam a importância do desenvolvimento das capacidades de cálculo mental e da estimação, referem a preocupação de criar mecanismos que evitem uma total depedência em relação à máquina.

Veloso (1991) estudou o processo de integração das Novas Tecnologias de Informação na prática pedagógica de professores de Matemática. De entre as conclusões deste estudo salientamos a forma como as propostas que integravam o programa de formação foram vividas de forma diversa pelos professores. Por outro lado, a integração da calculadora e do computador ao nível da prática pedagógica dos professores foi feita a diferentes níveis. Assim, alguns professores usaram a calculadora ou o computador pontualmente (apropriação incipiente); outros usaram estes instrumentos em actividades cuja natureza é mais relevante do ponto de vista cognitivo e que envolvem mais activamente os alunos (apropriação intermédia); finalmente, alguns professores usaram a calculadora ou o computador como ferramenta de investigação pessoal e utilizaram-no(s), de forma natural, na actividade pedagógica (apropriação plena).

Loureiro (1991) estudou a forma como os professores encararam o programa de formação, nomeadamente a visão da Matemática e da Educação Matemática e o papel educativo da calculadora nele propostos. Algumas das conclusões deste estudo apontam no sentido de que a calculadora pode ser considerada como um elemento facilitador de programas de formação de professores em que seja privilegiada a resolução de problemas e de actividades matemáticas. Os professores envolvidos no programa de formação, embora tendo atitudes diferentes em relação à utilização da calculadora na sala de aula, não a consideram impeditiva de uma aprendizagem da Matemática. No entanto, de uma forma geral, utilizaram a calculadora com os seus alunos apenas nos temas curriculares em que era explícita a ligação com algumas actividades apresentadas ao longo do programa de formação.

Da revisão feita, podemos considerar que várias questões em torno da utilização educativa da calculadora reunem uma certa unanimidade. Em primeiro lugar, a recomendação de utilizar a calculadora no processo de ensino-aprendizagem da Matemática em todos os anos de escolaridade. Em segundo lugar, a visão de que alguns professores de Matemática colocam ainda explícita ou implicitamente reservas à sua introdução, ao nível do trabalho que desenvolvem com os alunos. Finalmente, a necessidade de desenvolver materiais pedagógicos, de forma a que se possa tirar o maior partido da utilização educativa da calculadora, e de repensar os currículos.

O Trabalho em Grupo

Para Bossert (1989), nos últimos 15 anos têm sido desenvolvidas e testadas várias técnicas de aprendizagem cooperativa. Como refere, de uma forma geral, a investigação realizada nesta área aponta no sentido de que o sucesso dos alunos é pelo menos igual ao conseguido com um ensino mais tradicional, que os alunos ficam mais motivados em aprender e que desenvolvem atitudes de auto-estima e relações pessoais positivas.

Segundo Davidson e Kroll (1991) a organização de um ambiente de trabalho ao nível da sala de aula em que os alunos discutem ideias e trabalham em pequenos grupos na resolução de tarefas que lhes são apresentadas, é uma das alterações mais visíveis ao nível do ensino da Matemática na última década. Investigar se a aprendizagem em pequenos grupos tem de facto vantagens em relação a uma aprendizagem estruturada de uma forma mais tradicional, é um aspecto que estes autores identificam como importante. Como referem, um conjunto de estudos realizados na área da Educação Matemática revelou que só em menos de metade das investigações havia diferenças significativas entre a organização em pequenos grupos e as formas mais tradicionais de ensino. No entanto, quando se verificaram diferenças significativas, quase sempre a organização em pequenos grupos era a mais favorável. Segundo estes autores, estudos bastante recentes apontam no sentido de que os alunos que trabalham cooperativamente em pequenos grupos têm uma maior confiança nas suas capacidades, se empenham mais no trabalho e desenvolvem a capacidade de perceber pontos de vista diferentes dos seus.

Segundo Good, Mulryan e McCaslin (1992) alguns educadores consideram que o trabalho em pequenos grupos pode ser uma estratégia útil no sentido de ultrapassar alguns dos problemas relativos ao ensino-aprendizagem da Matemática. Assim, é frequentemente considerado que o trabalho em pequenos grupos pode ajudar a deslocar um ensino da Matemática muito centrado na prática de técnicas rotineiras para um ensino em que se dê mais atenção à construção e exploração de conceitos e à resolução de problemas. No entanto, para além da evidência de que modelos de ensino em pequenos grupos podem facilitar o sucesso dos alunos e desenvolver atitudes favoráveis em relação aos colegas e aos conteúdos estudados, há muitos factores que devem ser analisados de uma forma mais profunda. Por exemplo, a questão da formação ou não de grupos homogéneos, a forma como se organiza o trabalho e o tipo de tarefas que são trabalhadas e exploradas, são alguns dos aspectos que é necessário investigar de uma forma mais sistemática.

Good, Reys, Grouws e Mulyran (citados por Good, Mulyran e McCaslin, 1992), realizaram um estudo em que observaram o trabalho desenvolvido por 15 professores que habitualmente usavam o trabalho em pequenos grupos heterogéneos nas suas aulas. Nesta investigação, em que procuraram avaliar de uma forma geral os aspectos positivos e negativos do trabalho em pequenos grupos, concluiram que:

- no trabalho em pequenos grupos heterogéneos a maioria dos alunos empenhava-se activamente na aprendizagem, analisando e discutindo ideias matemáticas;

- muitas das aulas eram dedicadas à realização de actividades de investigação e de resolução de problemas;

- o trabalho em pequenos grupos proporcionava frequentemente aos alunos oportunidades de explorações mais diversificadas;

- os professores apoiavam-se pouco nos livros de texto; pelo contrário, na concepção e desenvolvimento das aulas recorriam a materiais que eles próprios organizavam.

No entanto, neste estudo, também foram identificados alguns aspectos negativos: muitas aulas acabavam sem que os alunos tivessem tempo de discutir com os seus colegas e com os professores o que tinham aprendido, os materiais que os professores produziam nem sempre tinham em conta uma progressão de dificuldades ao longo dos vários anos e nem sempre eram apropriados para o trabalho em pequenos grupos.

Webb (1991) analisou 17 investigações que estudaram sistematicamente a interacção que se estabelecia entre os alunos ao trabalharem em pequenos grupos na resolução de tarefas escolares relacionadas com a aprendizagem de diferentes temas de Matemática. O trabalho era organizado da seguinte forma: depois da introdução feita pelo professor a determinado assunto, os alunos trabalhavam em pequenos grupos (geralmente com 4 alunos cada um) na resolução de um conjunto de problemas. Por outro lado, na grande maioria dos estudos foram feitas gravações em vídeo ou em áudio em pelo menos uma sessão de trabalho. Em todos estes estudos foram recolhidos dados relativos aos resultados obtidos por cada aluno nos testes de avaliação que foram feitas no final da unidade. A análise destas 17 investigações revelou que:

- há uma correlação positiva entre os resultados obtidos individualmente pelos alunos e o facto de explicarem, de uma forma elaborada, aspectos em que os seus colegas de grupo tinham dificuldades; pelo contrário, a correlação entre os resultados obtidos pelos alunos e o facto de darem uma ajuda não elaborada (dizendo apenas a solução ou indicando o que deveriam fazer), não foi estatisticamente significativa;

- é importante que o pedido de ajuda que os alunos fazem se relacione com o tipo de resposta que obtêm; por exemplo, pedir que se explique determinada questão e obter apenas a resposta a ela, parece não contribuir para que o aluno obtenha melhores resultados nos testes resolvidos individualmente no final da unidade;

- nos estudos em que os grupos eram heterogéneos, estabelecia-se, regra geral, uma relação de tipo professor-aluno entre os melhores alunos e os mais fracos ao passo que os alunos médios participavam pouco no trabalho do grupo; os alunos médios participavam mais no trabalho e obtinham melhores resultados quando trabalhavam em grupos homogéneos do que quando trabalhavam em grupos heterogéneos;

- os alunos mais fracos e os alunos melhores obtinham piores resultados quando trabalhavam em grupos homogéneos;

- nos grupos heterogéneos formados por alunos bons e médios ou por alunos médios e fracos notou-se uma grande tendência para que todos participassem activamente no trabalho.

O tipo de agrupamento mais favorável foi também analisada por Good, Mulryan e McCaslin (1992). Considerando que esta questão tem sido bastante discutida, estes autores analisam um conjunto de investigações em que foi estudado este aspecto. Assim, a divisão da turma em dois ou três grupos homogéneos não parece favorecer um ambiente de trabalho que proporcione aprendizagens mais ricas (sobretudo para o grupo dos alunos mais fracos). Comparado com este tipo de agrupamento, a formação de pequenos grupos heterogéneos parece ser mais vantajosa. No entanto, muitos dos alunos que habitualmente tinham uma atitude mais passiva no formato de trabalho com toda a turma, mantêm esta atitude ao nível do trabalho em grupo. Como estes autores referem, a formação de pequenos grupos heterogéneos em si não é uma resposta. É necessário implementar estratégias que permitam que os alunos desenvolvam uma atitude activa em relação ao trabalho.

Em resumo, a literatura revista realça a ideia de que o trabalho em grupo favorece a aquisição e domínio dos conteúdos trabalhados e desenvolve nos alunos uma atitude mais positiva em relação aos seus colegas e em relação à matéria estudada. De uma forma geral, no trabalho em pequenos grupos heterogéneos, os alunos envolvem-se activamente na aprendizagem, analisando e discutindo ideias matemáticas. Este tipo de trabalho também parece favorecer oportunidades de exploração mais diversificadas. No entanto, nem todos os alunos têm uma atitude mais activa em relação ao trabalho realizado. Este é um dos problemas relativos ao trabalho em grupo que parece reclamar uma atenção especial no sentido de desenvolver e analisar estratégias que possibilitem uma maior participação no trabalho a estes alunos.

C A P Í T U L O 3

METODOLOGIA

Com este estudo, situado num contexto em que foi implementada uma proposta pedagógica onde se valorizou um processo de ensino-aprendizagem centrado na exploração de situações problemáticas e na resolução de problemas e em que a calculadora foi encarada como um instrumento facilitador deste processo, pretende-se responder às seguintes perguntas:

. como evoluiram os alunos em relação à capacidade de formular e resolver problemas?

. como se relacionaram com a calculadora, nomeadamente durante o processo de formulação e resolução de problemas?

. como evoluiram os alunos em relação ao trabalho em pequenos grupos?

Opções Metodológicas

Com este estudo pretende-se responder às questões formuladas, a partir da análise das mudanças observadas nas duas turmas de 7º ano de escolaridade em que foi implementada uma experiência de ensino-aprendizagem da Matemática. Apesar de ele se centrar no trabalho feito por alunos no contexto da sala de aula, não se pretende fazer qualquer tentativa de comparação com as aquisições dos alunos frequentando aulas de outro tipo, nem de generalização para outros ambientes de aprendizagem. As opções metodológicas adoptadas tiveram sempre presente o carácter particular e descritivo do estudo. Pretendia-se focar alguns dos efeitos da implementação de uma experiência de ensino da Matemática centrado na resolução de problemas e na utilização da calculadora. Todo o estudo se baseou nos alunos das duas turmas que foram alvo da experiência, nas mudanças observadas nestes alunos e na sua maneira pessoal de a encarar. Assúmia, pois, especial importância uma descrição detalhada do ambiente de trabalho a nível da sala de aula e da evolução observada no decurso desta experiência. Assim, o objectivo deste estudo, situado ao nível da descrição e análise da evolução dos alunos, aconselha a adopção de uma investigação de carácter qualitativo (Bogdan e Biklen, 1982; Ludke e André, 1986; Patton, 1987). De facto, trata-se de procurar apreender na complexidade das relações que se estabelecem ao nível do trabalho da sala de aula, padrões de evolução. Como referem Bogdan e Biklen (1982), quando os fenómenos são muito influenciados pelo contexto, justifica-se que o investigador mantenha um contacto directo e prolongado com a situação em que eles ocorrem. A principal fonte de recolha de dados é o investigador pois só assim é possível relacionar os acontecimentos observados com o contexto em que eles ocorrem. Assim, o investigador, ao presenciar as experiências e as relações que se vão estabelecendo na sala de aula, pode interpretar melhor as evoluções que vai observando e a forma como elas se vão estabelecendo e vão sendo vividas pelos alunos.

Por outro lado, neste estudo, estava em causa perceber a forma como os alunos viviam uma experiência de ensino-aprendizagem da Matemática. Importava pois entender as relações que se estabeleciam ao nível da sala de aula e a forma como evoluiam em relação às questões do estudo. Assim, havia uma maior preocupação com os processos do que com os produtos. Também não se tratava de comprovar ou testar hipóteses formuladas à partida. As abstracções foram feitas a partir da análise dos dados seguindo um processo de baixo para cima.

De uma forma geral, podemos pois dizer que este estudo apresenta as seguintes características que, segundo Bogdan e Biklen (1982), caracterizam uma investigação de tipo qualitativo: (1) o ambiente natural é a fonte directa dos dados e o investigador é o principal instrumento; (2) os dados recolhidos são sobretudo descritivos; (3) a grande preocupação centra-se nos processos; (4) a análise dos dados tende a seguir um processo indutivo; (5) é dada especial atenção ao ponto de vista dos participantes.

Segundo Patton (1987), a observação directa é uma importante fonte de recolha de dados na investigação qualitativa. Para além de permitir uma descrição detalhada das actividades realizadas no decurso de determinado programa, facilita uma descrição dos participantes e do significado que eles lhe atribuem. Neste sentido privilegiou-se a observação participada do trabalho realizado na sala de aula. Estes dados foram complementados pelos recolhidos nas reuniões realizadas com as professoras das duas turmas ao longo do decorrer da experiência e pela análise de documentos produzidos pelos alunos. No final da experiência, realizou-se uma reunião com as professoras em que foi feita uma análise mais sistemática da evolução dos alunos e apresentou-se um questionário a estes. Procurava-se, assim, recolher dados que complementassem o ponto de vista dos participantes, nomeadamente em relação aos aspectos do problema do estudo a que globalmente atribuiam mais significado.

Participantes

O estudo decorreu de Setembro de 1991 a Abril de 1992, em duas turmas do 7º ano, uma da Escola Secundária do Alto do Seixalinho e outra da Escola Secundária do Barreiro.

Estas escolas, localizadas no Barreiro, apresentam à partida características bastante distintas, nomeadamente ao nível da degradação das suas instalações, do número de professores de Matemática com habilitação própria e das condições de trabalho extra-aula. No entanto, a escolha destas escolas foi apenas determinada pelo facto de nelas se encontrarem a leccionar as professoras Teresa Olga Albuquerque e Olinda Semedo que se mostraram interessadas em trabalhar na área da resolução de problemas e na utilização da calculadora.

Teresa Olga é professora de Matemática há 10 anos, e é efectiva na Escola Secundária do Barreiro desde 1985/1986.

Possui a licenciatura de Matemática (Ramo Educacional) pela Faculdade de Ciências de Lisboa. É autora de manuais escolares para o 3º Ciclo do Ensino Básico. Durante os anos lectivos 1988/89 e 1989/90 foi assistente do Núcleo de Matemática da Escola Superior de Educação de Setúbal. Nesta escola, para além do trabalho realizado no âmbito da formação inicial de professores do 1º Ciclo do Ensino Básico, dinamizou várias acções de formação contínua de professores. No Ensino Secundário preferiu sempre ter horários que incluissem turmas do Unificado e do Complementar. É uma professora bastante activa e empenhada na sua profissão. Procura estar a par da evolução do ensino da Matemática, tem participado activamente em encontros de professores de Matemática e dinamizado algumas reuniões de trabalho com colegas de escolas do Barreiro. Foi coordenadora do projecto Minerva na sua escola durante dois anos, e realizou algumas experiências no âmbito da utilização educativa do computador no ensino da Matemática. A sua experiência, ao nível da sala de aula, na exploração de actividades relacionadas com a resolução de problemas apesar de pontual, sempre a entusiasmou. No entanto, desde há algum tempo, que gostava de se envolver numa experiência de trabalho mais sistemático em torno da resolução de problemas. Em relação à calculadora, embora nunca a tenha explorado com alunos da escola Secundária, na sua experiência de formação inicial e contínua de professores trabalhou vários aspectos relacionados com a utilização educativa da calculadora.

Olinda é professora de Matemática há 9 anos. É licenciada em Matemática (Ramo Educacional) pela Faculdade de Ciências de

Lisboa. Desde 1987/88 que é professora efectiva do 1º Grupo na Escola Secundária do Alto do Seixalinho. Regra geral tem optado por escolher horários com Unificados e Complementares. Sobretudo nos últimos 4 anos tem participado em encontros de professores de Matemática É uma professora bastante empenhada na sua profissão. Desde há vários anos que se interessa pela resolução de problemas e que periodicamente integra a exploração de alguns problemas no trabalho que realiza com os alunos ao nível da sala de aula. Apesar de ter participado em algumas reuniões de trabalho em que foram discutidos aspectos relativos à utilização educativa da calculadora, nunca a tinha usado no trabalho que realizava com os seus alunos ao nível da sala de aula.

As duas turmas envolvidas no estudo foram determinadas por serem as turmas de 7º ano que integravam o horário das professoras que participaram no projecto. O facto de elas apresentarem à partida características tão diferentes não obedeceu, pois, a qualquer escolha prévia.

Por uma questão de comodidade vamos passar a denominar as duas turmas por A e B, pertencentes respectivamente à Escola Secundária do Barreiro e à Escola Secundária do Alto do Seixalinho.

A turma A, com 25 alunos, apresentava à partida características bastante homogéneas, quer em relação à idade dos alunos quer em relação ao sucesso escolar anterior. Assim, nenhum aluno da turma tinha reprovado até este ano de escolaridade e todos os alunos tinham 12 anos excepto dois (um com 13 anos e outro com 11). Quanto às classificações obtidas na disciplina de Matemática no ano anterior, um aluno obteve nível

2, quinze alunos nível 3, três alunos nível 4 e seis alunos nível 5.

A turma B, com 27 alunos, apresentava à partida características bastante heterogéneas. A idade dos alunos ia desde os 11 até aos 16 anos, sendo a média das idades de 12,9. Dos 27 alunos, 18 tinham reprovado pelo menos uma vez. No ano anterior, a classificação obtida na disciplina de Matemática foi a seguinte: nível 1 - dois alunos; nível 2 - dez alunos; nível 3 - dez alunos; nível 4 - dois alunos; nível 5 - dois alunos. Um aluno reprovou, no ano anterior, por excesso de faltas. Ao longo do ano 3 alunos abandonaram a escola e 2 foram transferidos de turma.

Materiais

Calculadora

Ao longo de toda a experiência cada aluno dispunha de uma calculadora não científica. A exploração das várias potencialidades da calculadora foi sendo feita à medida que as propostas de trabalho apresentadas o justificavam. Ao longo da experiência, em relação à utilização da calculadora, foram trabalhados com os alunos os seguintes aspectos: apagar todos os registos e o último registo entrado, utilização de constantes, utilização da memória, utilização das teclas +/- e % e determinação do valor de expressões numéricas quando a calculadora não respeita a prioridade das operações.

Fichas de Trabalho

As fichas de trabalho (anexo 1) apresentadas aos alunos orientaram grande parte das actividades realizadas. Apresenta-se em seguida os objectivos e justificação do conjunto de fichas usadas ao longo da experiência.

Fichas 1 a 14 – Com este conjunto de fichas procurou-se que, ao nível dos objectivos gerais, os alunos:

.realizassem uma aprendizagem de trabalho em pequeno grupo;

.se envolvessem num processo de aprendizagem em que são eles os principais responsáveis pela construção do seu saber;

.trabalhassem ao seu próprio ritmo e não a um ritmo imposto exteriormente;

.sentissem a necessidade de fazer várias experiências com a calculadora, com base nas quais organizavam algumas conclusões;

.organizassem as principais conclusões e justificações do trabalho realizado em grupo de forma a poder comunicá-lo e discuti-lo oralmente com toda a turma.

Para além destes objectivos gerais, cada ficha tinha objectivos específicos que se passam a apresentar.

Ficha 1. O quadrado dos 100 – Com esta ficha procurou-se que, após a construção de uma tabela com a qual trabalhariam nas primeiras três fichas, usassem a calculadora para descobrir regularidades e conseguissem encontrar argumentos para garantir que elas se verificavam sempre.

Ficha 2. Mais quadrados - Nesta ficha era a noção de média aritmética que estava em jogo. Tratava-se de compreender, na tabela anteriormente construída, o significado da média aritmética de determinados números, descobrir propriedades e justificar as conclusões. Como prolongamento desta ficha foi pedido aos alunos que determinassem a média aritmética de diferentes distribuições e foi analisada a representatividade da média em cada uma delas.

Ficha 3. À descoberta dos primos - Com esta ficha, a propósito da construção de um Crivo de Eratóstenes, pretendia-se que os alunos recordassem os conceitos de número primo, de múltiplo e divisor de um número e utilizassem a parcela constante para determinar os múltipos de um número.

Ficha 4. A propósito de múltiplos e divisores - Com as primeiras seis actividades desta ficha, procurava-se aprofundar os conceitos de múltiplo e divisor de um número e descobrir relações, com o apoio da calculadora, que permitissem descobrir critérios de divisibilidade. Nas duas últimas questões desta ficha procurava-se que os alunos resolvessem problemas que envolviam os conceitos de múltiplo e divisor. No problema 8, estava sobretudo em causa encontrar argumentos para justificar a relação encontrada. Com o problema 9, procurava-se que os alunos testassem vários valores e com base nos resultados obtidos fossem limitando o número de hipóteses até chegarem à solução do problema.

Ficha 5. Decomposições e mais decomposições - Com esta ficha pretendia-se que os alunos fizessem decomposições de números em factores e utilizassem essas decomposições na resolução de exercícios.

Ficha 6. Às voltas com mais problemas – Esta ficha tinha como objectivo contextualizar os conceitos de m.m.c. e m.d.c. Pretendia-se que os alunos recorressem a diferentes estratégias de resolução (fazendo várias experiências, organizando esquemas ou fazendo desenhos) e com base na discussão das suas resoluções analisassem os conceitos que estavam por de trás de cada problema.

Ficha 7. À volta do Trinca-Espinhas – Com esta ficha pretendia-se que os alunos reflectissem sobre o trabalho realizado na aula em que tinham jogado com o programa "Trinca-Espinhas". Assim, para além de explicarem por palavras suas a forma como funcionava este jogo, deveriam avançar algumas estratégias que pudessem ajudar a ganhar o jogo.

Fichas 8 a 13 – Estas fichas formaram um conjunto que foi utilizado no estudo de alguns aspectos de geometria elementar. Procurou-se:

.proporcionar actividades que envolvessem a utilização do Mira e que introduzissem os conceitos de simetria em relação a um eixo e de eixos de simetria de uma figura (ficha 8. Simetrias e mais simetrias).

.proporcionar algumas experiências com o Tangran a partir das quais se recordavam algumas propriedades de figuras geométricas (ficha 9. Construir figuras a partir do Tangram);

.recordar algumas noções elementares de geometria e as notações usadas na sua representação (ficha 10. Rectas, semi-rectas e segmentos de recta);

.recordar a classificação de triângulos e proporcionar experiências de utilização do transferidor, da régua e do compasso (ficha 11. A propósito de triângulos);

.descobrir, através de tentativas com palhinhas de diferentes tamanhos, a desigualdade triangular e resolver exercícios que envolvem a utilização desta desigualdade (ficha 12. Mais sobre triângulos);

.partir de medições dos triângulos apresentados para estabelecer relações entre lados e ângulos de um triângulo e resolver exercícios usando estas relações (ficha 13. Relações entre lados e ângulos de um triângulo).

Fichas 14 a 27 – Com este conjunto de fichas, para além de se manterem os objectivos gerais definidos anteriormente, procurou-se trabalhar a formulação de problemas e desenvolver de uma forma mais sistemática a capacidade de resolução de problemas. Referem-se em seguida os objectivos específicos de cada uma das fichas.

Ficha 14. Às voltas com o futebol – A propósito da análise de uma tabela que representava a classificação de vários clubes de futebol, pretendia-se que os alunos explorassem e justificassem relações entre a pontuação obtida, os resultados de cada jogo e o número de golos marcados e sofridos. Com o cálculo do "*goal average*" pretendeu-se criar uma situação que contextualizava o aparecimento e a ordenação de números negativos. Com o problema de organização do torneio de futebol, estava em causa a procura de uma estratégia adequada para a sua resolução e a organização de um ensaio escrito que pudesse traduzir, de uma forma clara, a resolução do problema.

Ficha 15. Testes e mais testes – Na primeira questão desta ficha pretendia-se que os alunos, a propósito da classificação de um possível teste, recordassem e aplicassem conhecimentos anteriormente estudados. Nas duas perguntas seguintes, pretendia-se que os alunos resolvessem problemas em que estava em causa a realização de várias tentativas, experimentando números negativos e positivos. Finalmente, na última pergunta, foi apresentada aos alunos a primeira situação de formulação de problemas.

Ficha 16. Jogo do intervalo – Com esta ficha pretendia-se que os alunos resolvessem questões relacionadas com a adição de números racionais. Depois de uma primeira fase em que podiam realizar várias tentativas para se aperceberem da melhor forma de jogar, pretendia-se que os alunos integrassem a conceito de simétrico de um número conseguindo ganhar o jogo apenas em uma jogada.

Ficha 17. Tiro ao alvo – Nesta ficha pretendia-se que os alunos resolvessem problemas usando uma estratégia de ensaio e erro sistemático e formulassem um problema que tivesse como contexto a situação apresentada.

Ficha 18. Às voltas com a calculadora – Com esta ficha pretendia-se que os alunos percebessem a função da tecla +/- e averiguassem se as suas calculadoras respeitavam ou não a prioridade das operações.

Ficha 19. Esta carola não pára – A propósito de um jogo, em que os alunos trabalhavam em grupos de 2, pretendia-se que:

.usassem as propriedades da adição e da multiplicação em Q de forma a conseguirem obter a melhor pontuação possível;

.decidissem, aliado ao aspecto anterior, usar a calculadora apenas nas expressões em que tal se justificasse;

.analisassem a correcção do trabalho feito pelo seu colega;

.cada aluno formulasse um problema, apresentando uma jogada que pudesse ser incluída na apresentação deste jogo. Assim, os alunos tinham que inventar um problema baseado na situação deste jogo e resolvê-lo, justificando porque é que só uma das três expressões numéricas que apresentavam precisava de ser resolvida com o auxílio da calculadora.

Ficha 20. Ida da Terra à Lua **e Ficha 21.** Uma escolha difícil - Nestas fichas estava em causa a descoberta de regularidades. Com a sua resolução, em que se justificava a utilização de constantes, pretendia-se também que os alunos se apercebessem de como o crescimento de uma progressão geométrica pode ser muito rápido. Propunha-se ainda, a formulação de um problema baseado nas hipóteses da ficha 21.

Ficha 22. Descontos e impostos - Com a resolução deste problema, em que se introduziu o cálculo de percentagens com a calculadora, pretendia-se que testassem conjecturas e procurassem argumentos que justificassem que a solução encontrada era sempre válida. Pretendia-se também que a resolução deste problema fosse um ponto de partida para uma discussão em torno do que é um contra-exemplo e uma demonstração.

Ficha 23. A viagem de comboio - com a resolução deste problema pretendia-se que os alunos interpretassem os conhecimentos que têm sobre fracções, analisando esquemas e considerando uma fracção em diferentes unidades. Pretendia-se também, que inventassem um novo problema.

Ficha 24. As escadas mágicas, **Ficha 25.** Investigando sequências, **Ficha 26.** Investigando regularidades **e Ficha 27.** Regularidades nas potências - nestas fichas estava em causa a descoberta de regularidades. A ficha 24 iniciava os alunos na descoberta e justificação do termo geral. Na ficha 26 pretendia-se que com base na identificação de regularidades, os alunos descobrissem novos elementos que as verificassem e identificassem uma lei que as permitisse obter. Na ficha 27, pretendia-se que os alunos usassem as regularidades observadas, na resolução de várias questões.

Fichas A e B - Com estas fichas, pretendia-se avaliar a forma como os alunos, a nível individual, resolviam problemas em que estavam em causa a descoberta de regularidades e a utilização da estratégia de ensaio e erro sistemático.

Instrumentos

Os instrumentos usados nesta investigação são de quatro tipos: (a) registos escritos feitos pela investigadora com base na observação das aulas e das reuniões semanais com as professoras; (b) registos magnéticos do trabalho realizado por dois grupos de alunos durante a formulação de problemas e da última reunião com as professoras; c) documentos escritos produzidos pelos alunos quando da resolução em grupo e individual das fichas apresentadas; d) questionário feito aos alunos no final da experiência.

Registos de Observação das Aulas

A observação das aulas assumiu características diferentes nas duas fases do estudo. Na primeira fase, em que a investigadora assistiu a cerca de um terço das aulas, procurou-se cumprir duas ordens distintas de objectivos: por um lado conhecer melhor os alunos, a maneira como se relacionavam entre si e com as actividades apresentadas, e por outro, criar condições para que a presença da investigadora fosse uma realidade a que os alunos se iam progressivamente habituando. Nesta fase a investigadora assumiu quer o papel de observadora quer o de recurso. Assim, nas aulas em que os alunos trabalhavam em grupo, a investigadora circulava pelos diferentes grupos, esclarecia dúvidas que os alunos levantavam, encorajava a que continuassem o trabalho ou a que reflectissem melhor em determinados aspectos. O papel de simples observadora foi assumido nos momentos de apresentação e síntese do trabalho de grupo.

Na segunda fase do estudo, a investigadora observou todas as aulas de duas horas, uma vez que era nestas aulas que eram apresentadas as actividades de resolução e formulação de problemas. Nestas aulas, uma vez que os alunos estavam organizados em pequenos grupos, a investigadora procurou concentrar a atenção no desenrolar do trabalho de cada grupo. Assim, embora procurando recolher dados relativos ao ambiente de trabalho geral, em cada aula procurava seguir mais de perto o trabalho realizado por determinado grupo de alunos. Ao observar um grupo, a investigadora procurou perceber de uma forma mais profunda as principais dificuldades encontradas pelos alunos nas actividades que lhes eram propostas, as estratégias que experimentavam para as ultrapassar, os processos que usavam para formular problemas, a forma como usavam a calculadora na resolução e formulação de problemas e a organização de trabalho em grupo.

Também foram observadas 6 aulas de uma hora, em que os alunos trabalhavam individualmente e em que a observação incidiu sobre o desenrolar geral do trabalho.

Durante as aulas a investigadora ia tomando notas sobre a forma como elas se desenrolavam. Com base nestas notas, no fim de cada aula observada, foi elaborado um registo escrito em que se procurou descrever o ambiente geral, a forma como decorria o trabalho de grupo, as dificuldades encontradas pelos alunos, as perguntas que iam colocando e a forma como comunicavam e discutiam com toda a turma o trabalho realizado.

Registos Magnéticos das Discussões dos Grupos

Na segunda fase do estudo, sempre que eram propostas aos alunos actividades de formulação de problemas, foi feito o registo em banda magnética das discussões ocorridas entre os alunos de dois grupos, um de cada turma. Procurava-se assim seguir integralmente a evolução destes grupos em relação à formulação de problemas tentando perceber os processos que os alunos usavam e as dificuldades que encontravam na formulação de problemas.

Depois de ouvir estes registos magnéticos várias vezes, a investigadora registou por escrito todos os aspectos do trabalho realizado pelos alunos: como interpretavam as situações apresentadas, as questões que analisavam e discutiam, os enunciados que propunham, as dificuldades encontradas e o ambiente de trabalho.

Registos das Reuniões com as Professoras

Semanalmente, a investigadora reuniu com as professoras das duas turmas envolvidas no estudo. Nestas reuniões recolheram-se dados que complementavam os directamente recolhidos pela investigadora por observação das aulas. Assim, a investigadora anotava os aspectos principais da reflexão que as professoras faziam sobre a forma como tinha decorrido o trabalho ao longo da semana. Com base nestes apontamentos, após cada reunião, elaborou uma descrição mais completa e detalhada de todas as questões analisadas durante a reunião.

No final da experiência, realizou-se uma reunião em que se procurou que as professoras analisassem detalhadamente os aspectos observados em relação à resolução e formulação de problemas, utilização da calculadora e a forma como decorreu o trabalho em grupo, e que fizessem um balanço geral da experiência. Para tal foi elaborado um guião (anexo 4). Foi feito um registo em banda magnética desta reunião que foi integralmente transcrito pela investigadora.

Documentos Produzidos pelos Alunos Quando da Resolução das Fichas

As resoluções em grupo e individuais das fichas de trabalho foram recolhidas pela investigadora. Em relação à resolução de problemas em grupo, ficou-se assim com um conjunto de dados que permitiam analisar a evolução por grupo e por actividade das resoluções escritas apresentadas pelos alunos.

Ao longo da segunda fase do estudo, foram apresentados alguns problemas (fichas A e B) que os alunos resolveram individualmente. Para avaliar as resoluções apresentadas foi usada uma escala de classificação holística focada (anexo 3), aplicada por Fernandes (1988) no trabalho que realizou no âmbito da Tese de Doutoramento e que é uma adaptação de uma escala proposta por Charles, Lester e O'Daffer (1987). As resoluções apresentadas pelos alunos foram classificadas em conjunto com as duas professoras usando o seguinte procedimento recomendado por Fernandes (1988) a propósito da utilização desta escala: leitura prévia de todas as resoluções apresentadas pelos alunos procurando identificar resoluções de referência em que fosse claro o critério utilizado e a respectiva pontuação.

As formulações de problemas apresentadas pelos alunos eram analisadas em conjunto pela investigadora e pelas professoras de acordo com os seguintes parâmetros:

- plausibilidade do enunciado apresentado;
- clareza do enunciado;
- criatividade e imaginação do enunciado apresentado.

Questionário aos Alunos

Foi elaborado pela investigadora um pequeno questionário (anexo 5) a que os alunos responderam no final da experiência. Com este questionário pretendia-se recolher dados sobre a forma como os alunos encaravam a experiência de trabalho vivida. Por se tratar de um questionário aberto, anónimo, e por se ter dado bastante tempo para os alunos elaborarem as suas respostas, criaram-se condições para que estes realçassem os aspectos que consideraram mais importantes ao longo da experiência permitindo ter bastante confiança nos dados recolhidos.

Análise de Dados

Os dados recolhidos através dos vários instrumentos foram lidos várias vezes e registados os aspectos que se salientavam da sua leitura.

Com base na leitura do registo escrito da observação de cada aula procurou-se caracterizar os aspectos observados em relação a cada um dos pontos do problema: resolução de problemas, formulação de problemas, utilização da calculadora e trabalho em grupo. Cada um destes pontos era depois completado e desenvolvido através da leitura dos dados recolhidos nas reuniões com as professoras e dos documentos produzidos pelos alunos. Por exemplo, depois da leitura geral das observações feitas durante uma aula, os aspectos referentes à formulação de problemas eram isolados e completados com a leitura de todos os dados recolhidos em relação a este aspecto: as formulações apresentadas pelos alunos, a descrição do trabalho realizado pelos dois grupos de que foram feitos registos magnéticos, a análise global que a investigadora tinha feito dos enunciados apresentados por todos os grupos e as observações e comentários complementares feitas pelas professoras durante as reuniões com a investigadora. A leitura dos dados referentes a uma mesma actividade de formulação de problemas permitiu uma análise bastante completa de tudo o que tinha ocorrido durante a sua realização. Assim, os registos feitos com base na observação das aulas e das reuniões com as professoras, forneciam uma informação globalizante, que contextualizava o trabalho escrito apresentado pelos alunos.

A transcrição da gravação da última reunião com as professoras foi lida várias vezes e analisada de acordo com os aspectos definidos no problema do estudo. Procurou-se, em seguida, integrar o que as professoras tinham referido durante esta reunião, com os aspectos identificados através da análise dos dados referidos anteriormente.

As respostas obtidas no questionário apresentado aos alunos foram, em primeiro lugar, lidas globalmente e, depois, sujeitas a leituras sucessivas, pergunta a pergunta. A leitura global permitiu avaliar que, de uma forma geral, não seria difícil agrupar as respostas em categorias uma vez que as opiniões dos alunos pareciam dividir-se por dois ou três aspectos dominantes em relação a cada pergunta. Passou-se, então, à leitura das respostas dos alunos, pergunta a pergunta. Assim, a partir da análise do conteúdo das respostas, definiram-se categorias referentes a determinada pergunta. Para tal, após a leitura de cada resposta, eram registados de uma forma sintética os aspectos que ela mais destacava. Com base nestes aspectos definiram-se categorias. Nesta categorização cada resposta só podia pertencer a uma das categorias e cada uma tinha de pertencer a uma das categorias definidas.

CAPÍTULO 4

O DESENVOLVIMENTO DA EXPERIÊNCIA

Neste capítulo, descrevem-se os aspectos gerais do desenvolvimento da experiência com os alunos das duas turmas de 7º ano de escolaridade. Assim, será feita uma descrição geral da forma como se organizou o trabalho a nível da sala de aula e das opções feitas no que respeita à resolução e formulação de problemas, à utilização da calculadora e ao trabalho em pequenos grupos.

Neste capítulo, procura-se também descrever alguns aspectos que puderam ser observados ao longo das duas fases do estudo que, embora intimamente relacionadas entre si, diferiam na ênfase colocada em alguns dos seus objectivos.

A Concretização da Experiência

A forma como foi trabalhado na sala de aula cada um dos aspectos em que era colocada a ênfase da experiência foi discutida com as duas professoras em reuniões realizadas antes do arranque das actividades. Também as fichas apresentadas aos alunos foram elaboradas pela investigadora e pelas professoras. Assim, em Julho e no início de Setembro de 1991 realizaram-se várias reuniões de trabalho em que foram definidos os objectivos gerais da experiência e a forma de a concretizar. Enquanto esta decorreu, realizou-se uma reunião semanal entre a investigadora e as professoras em que era analisada a forma como ela estava a decorrer e em que se precisava e discutia o trabalho a realizar na semana seguinte.

De uma forma geral nas aulas de duas horas apresentaram-se fichas para os alunos resolverem em grupos de 4 ou 5 alunos. Nas restantes aulas, as professoras organizaram sínteses e trabalharam com os alunos aspectos mais rotineiros.

O Trabalho em Pequenos Grupos

O trabalho em pequenos grupos é frequentemente considerado como uma componente educativa importante na medida em que desenvolve, por exemplo, a capacidade de cooperação, de análise de ideias expostas pelos outros, de ajuda e de organização.

Ao longo da experiência realizada com os alunos e no sentido de criar condições para que o trabalho em grupo fosse o mais frutuoso possível considerou-se importante ter em atenção alguns aspectos. Em primeiro lugar, procurou-se que as propostas que serviam de base ao trabalho em grupo tivessem uma forte componente não rotineira. Assim, uma vez que em relação às actividades que deviam resolver os caminhos a seguir podiam não ser únicos nem imediatos, procurava-se que elas incentivassem os alunos a expor as suas ideias, ouvir as dos seus colegas e discutir estratégias e soluções.

Outro aspecto que se considerou bastante importante foi a atitude das professoras enquanto os alunos trabalhavam em grupo. Sempre que os alunos solicitavam a ajuda das professoras, estas procuravam discutir com eles as questões sem apresentar respostas definitivas. Assim, as professoras ajudavam os alunos a organizar o trabalho e a esclarecer questões, mas procuravam sempre remeter para o grupo as decisões a tomar.

Finalmente, a cada grupo era pedido que apresentasse por escrito a resolução das actividades propostas. Procurava-se, assim, que os alunos sentissem que o trabalho realizado em grupo era valorizado pelas professoras. O registo escrito do trabalho de grupo também foi importante para que as professoras se pudessem aperceber melhor das dificuldades do grupo e apresentar sugestões concretas no sentido de as ultrapassar.

A Formulação e Resolução de Problemas

Várias formas de trabalhar com os alunos a resolução de problemas têm sido objecto de bastantes investigações. No entanto, há uma certa unanimidade em considerar que não existem indicações precisas que permitam privilegiar umas em relação às outras.

De uma forma geral, a resolução de problemas decorreu a partir do trabalho em pequenos grupos de 4 ou 5 alunos. Assim, ao longo de toda a experiência, quando da resolução de problemas, as professoras apoiavam o trabalho que cada grupo ia realizando e organizavam uma reflexão final. Ao nível do apoio à resolução de problemas as professoras ajudavam sobretudo a analisar o enunciado do problema e a sua resolução, procurando não dar respostas directas mas sim incentivar a curiosidade dos alunos, ajudar a explicitar a forma como pensavam e encorajar as tentativas que iam fazendo. Neste sentido foram muito frequentes perguntas como: "o que é que se pretende saber?", "O que é que já se sabe?", "não poderão continuar a experimentar?", "a que conclusões já chegaram?", "a partir dos primeiros resultados não conseguem encontrar uma lei?", "será que a solução é mesmo essa?".

Ao nível da reflexão final, as professoras procuravam analisar a solução encontrada e comparar diferentes processos usados pelos alunos na resolução do problema. Este era o momento de discutir com toda a turma as estratégias usadas pelos alunos para resolver o mesmo problema, analisar as que se revelavam mais vantajosas, reflectir sobre a solução encontrada e sobre possíveis extensões do problema.

Em relação à formulação de problemas, que decorreu a partir de actividades apresentadas nas fichas de trabalho, foi dada especial atenção à análise dos enunciados que os alunos apresentavam. As professoras, depois de analisarem as formulações apresentados pelos alunos, reflectiam com toda a turma ou com cada grupo sobre a plausibilidade e clareza do enunciado, sobre se a questão que colocavam se poderia ou não considerar um problema e sobre a criatividade e imaginação do problema apresentado. Para além disto, após a primeira actividade de formulação de problemas (ficha 15), durante uma aula, as professoras exploraram exaustivamente a situação apresentada, procurando assim que os alunos se apercebessem da diversidade de problemas que se podem apresentar com base numa mesma situação.

A Calculadora

Ao longo de toda a experiência cada aluno dispunha de uma calculadora não científica. Na primeira aula de trabalho com os alunos foi feita uma breve apresentação de como se poderiam apagar os registos introduzidos e corrigir erros cometidos na introdução de valores ou de operações. Os restantes aspectos - número de dígitos com que a máquina funciona, utilização de constantes, utilização da memória e das teclas +/-, % e o cálculo de expressões numéricas - foram discutidos quando as propostas de trabalho apresentadas o justificavam.

A Primeira Parte do Estudo

A primeira parte do estudo decorreu de Setembro a Dezembro de 1991 e tinha com principais objectivos a criação de uma atmosfera de trabalho em que fosse o aluno o principal responsável pela construção do seu conhecimento matemático, se criasse um espírito de autonomia em relação ao professor e se adquirissem hábitos de trabalho em grupo.

Com base nos dados recolhidos na observação das aulas e nas reuniões de trabalho com as professoras das turmas, vai ser descrita de uma forma geral, a maneira como decorreu esta fase da experiência.

A Adaptação dos Alunos ao Esquema de Trabalho

De uma forma geral os alunos mostraram bastantes dificuldades em resolver as questões apresentadas nas fichas de trabalho, sobretudo quando lhes era pedida uma justificação de determinado resultado ou quando tinham que descobrir alguma relação. Assim, se na resolução de questões mais imediatas manifestavam um certo entusiasmo, perante as primeiras dificuldades que encontravam, gerava-se uma grande confusão nos grupos. Os alunos desistiam facilmente de procurar resolver por si sós essas dificuldades e solicitavam de imediato as professoras para "arbitrar" os conflitos que se tinham gerado no grupo.

O facto de as professoras adoptarem uma atitude de não dar respostas directas às perguntas, contrariou visivelmente alguns alunos da turma B. Por exemplo, na ficha 4, quando se pedia que descobrissem um critério de divisibilidade por 4, vários alunos fizeram comentários do tipo: "como é que podemos saber responder a esta pergunta se a professora ainda não explicou isto?"

Nesta turma, em muitas ocasiões, foi evidente este sentimento de pensar que primeiro a professora deveria explicar a matéria e só depois pedir que eles respondessem a questões relacionadas com ela. A preferência por um tipo de organização mais tradicional chegou mesmo a ser referida por alguns alunos:

"Nas aulas de Matemática eu gosto é de ir ao quadro resolver exercícios."

"Gostava mais como o meu professor do ano passado fazia: dava-nos um resumo da matéria e depois nós fazíamos muitos exercícios."

Para muitos alunos desta turma, o facto de lhes serem propostas actividades em que deveriam ser eles a descobrir e explorar caminhos e tirar conclusões, era encarado como uma tarefa muito difícil e que de alguma forma correspondia a exigir demasiado deles. O sentimento de que se lhes estava a propor algo de extremamente difícil começou mesmo a originar um ambiente em que pouco se trabalhava: dificilmente os alunos se envolviam no trabalho e pensavam nas questões das fichas e esperavam constantemente que a professora lhes desse indicações precisas sobre o que deveriam fazer. Perante isto, decidiu-se que antes da resolução de cada ficha de trabalho, seria feita uma pequena introducão em que a professora focaria aspectos relacionados com os assuntos nela abordados. Sem que se tratasse propriamente de explicar a matéria e depois apresentar as fichas de trabalho como exercícios de consolidação dos conhecimentos adquiridos, procurou-se recordar, através de um diálogo com os alunos, conceitos e técnicas relacionados com as fichas de trabalho. Esta estratégia começou a ser adoptada na ficha 8. Embora inicialmente se tenha observado um certo agrado dos alunos por este tipo de organização, logo na aula em que foi apresentada a ficha 10, os alunos começaram a manifestar alguma impaciência por não poderem começar de imediato a trabalhar nas fichas e mostraram muito menos entusiasmo em ouvir e participar num diálogo com a professora, do que em trabalhar em grupo. Talvez por esta fase de trabalho ter uma forte componente prática (utilização de materiais manipulativos e construções com régua e compasso), notou-se um maior entusiasmo em resolver em grupo as fichas de trabalho e uma maior persistência na procura de conclusões. Assim, foi-se progressivamente abandonando a introdução feita pela professora antes da resolução de cada ficha de trabalho e embora esta ainda fosse muito solicitada, começou a viver-se um ambiente de trabalho diferente: os alunos procuravam de facto resolver as questões apresentadas, manifestavam algum entusiasmo em pensar nas questões e antes de solicitarem a ajuda da professora procuravam pensar primeiro pos si sós.

Na turma A, apesar de se poder afirmar que os alunos não evidenciavam mais facilidades na resolução de muitas das questões apresentadas nas fichas de trabalho, sempre manifestaram interesse em analisar as suas próprias sugestões e conclusões, não mostrando qualquer contrariedade por a professora não dar resposta directa às suas perguntas. Foi mesmo bastante visível que, com a continuação do trabalho, os alunos desta turma começaram a solicitar menos a professora e a procurar com entusiasmo caminhos para resolverem as questões apresentadas.

Assim, em conclusão, a adaptação dos alunos ao esquema de trabalho adoptado diferiu nas duas turmas. Assim, na turma B, gerou-se inicialmente uma certa contestação ao facto de se procurar que eles assumissem uma atitude activa na construção do seu conhecimento. De facto, os alunos desta turma consideraram que com a organização de trabalho proposta tinham muitas dificuldades, chegando mesmo alguns a explicitar a sua preferência por uma forma de trabalho mais tradicional em que o professor explica a matéria e propõe a resolução de exercícios de prática rotineira. Na turma A nunca se sentiu uma contestação activa à forma de trabalho adoptada. Os alunos tinham dificuldades em, por si sós, decidir o caminho a seguir na resolução de algumas das actividades, mas sempre se mostraram interessados em as tentar resolver.

De uma forma geral, o ambiente de trabalho que se foi estabelecendo nas duas turmas foi-se tornando mais agradável e estimulante. Na turma B houve muitas situações de avanço e retrocesso quer em relação à forma como decorria o trabalho quer em relação ao entusiasmo que os alunos manifestavam pelas aulas. No entanto, ao comparar a forma como o trabalho se desenrolou nas primeiras e nas últimas aulas desta fase da experiência, podemos sem dúvida afirmar que muito se avançou. Assim, no final desta fase, os alunos das duas turmas entusiasmavam-se com as propostas de trabalho apresentadas e começavam a conseguir ultrapassar as dificuldades que iam surgindo.

O Trabalho de Grupo

A forma como decorreu o trabalho em grupo também variou nas duas turmas. Na turma A, notou-se na maioria dos grupos uma grande dificuldade em confrontar argumentos e em chegar a conclusões em conjunto e na turma B, além destas dificuldades, era visível inicialmente uma certa agressividade entre os alunos de alguns grupos. Podemos dizer que apesar dos alunos da turma A sentirem, sobretudo nas primeiras aulas, dificuldades em trabalhar cooperativamente e em estar de acordo com as resoluções a apresentar, as tarefas que lhes eram propostas foram sempre encaradas como desafios ao grupo como um todo e a que o grupo deveria procurar responder. Na outra turma, pelo contrário, houve situações em que um mesmo grupo apresentava soluções diferentes que correspondiam a resoluções diferentes de alunos do mesmo grupo. Pode-se no entanto afirmar, que nas duas turmas, apesar do caminho percorrido ter sido diferente, houve uma progressão geral no sentido de melhorar a forma como os alunos trabalhavam em grupo. Para este facto, muito parece ter contribuído a atitude das professoras ao analisarem com os alunos de cada grupo o modo como o trabalho estava a decorrer e ao avançarem sugestões concretas que poderiam melhorar o modo de funcionamento do grupo.

No final desta fase da experiência, em relação à forma como os alunos trabalhavam em grupo, podemos dizer que em todos os grupos da turma A havia um bom envolvimento dos alunos em relação ao trabalho que realizavam e era bem visível uma grande autonomia em relação à professora. Igualmente manifestavam grande entusiasmo por este tipo de trabalho.

Por outro lado, na turma B, os alunos manifestaram um certo envolvimento em relação ao trabalho de grupo. Em todos os grupos, excepto dois, havia uma atitude geral de perseverança em relação ao trabalho. De uma forma geral, apesar de realizarem um trabalho pouco profundo, manifestavam entusiasmo por resolver as questões apresentadas No entanto, perante situações que consideravam mais difíceis, desistiam facilmente e solicitavam de imediato a ajuda da professora.

Assim, em conclusão, nas duas turma os alunos tiveram bastantes dificuldades iniciais em trabalhar sem a ajuda das professoras e em se organizar cooperativamente na resolução das actividades apresentadas. Na turma B, em vários grupos, os alunos discutiam com bastante agressividade com os seus colegas e o avanço do trabalho dependia muito da ajuda da professora.

Embora seguindo um processo com vários avanços e recuos, no final desta fase do estudo quatro dos seis grupos da turma B evidenciavam entusiasmo pelo trabalho que realizavam em grupo e eram mais autónomos em relação à professora. No entanto, perante uma tarefa que consideravam mais difícil, ainda solicitavam quase de imediato a ajuda da professora. Na turma A começava a ser constante uma grande autonomia dos grupos e um grande entusiasmo e envolvimento por este tipo de trabalho.

A Resolução de Problemas

Ao longo da primeira fase da experiência os alunos resolveram alguns problemas. No entanto, como foi referido, a ênfase do processo de ensino-aprendizagem foi colocada na criação de uma atmosfera de trabalho em que o aluno fosse o principal responsável pela construção do seu conhecimento matemático, no desenvolvimento de hábitos de trabalho em grupo e de autonomia em relação ao professor.

Nesta fase, pôde-se já observar uma certa evolução dos alunos em relação à resolução de problemas. Assim, de uma atitude inicial quase que de bloqueio perante qualquer questão cuja resposta não fosse imediata ou que não envolvesse um certo número de cálculos bem identificados à partida, os alunos evoluiram bastante. A interpretação de um enunciado foi um dos aspectos em que foi maior esta evolução. Assim, nos primeiros problemas resolvidos em grupo, após uma primeira leitura do enunciado a maioria dos grupos solicitava de imediato as professoras dizendo invariavelmente: "professora não percebemos esta pergunta" ou "professora, aqui o que é preciso fazer?".

Progressivamente os alunos foram abandonando esta atitude, mostrando maior persistência em tentar perceber o problema e em procurar um processo de resolução. Como referiu uma professora na reunião final:

> "Perceber que na resolução de um problema é natural não saber, à partida, o caminho a seguir, foi a grande evolução dos alunos nesta fase."

No entanto, em muitos grupos, só com a ajuda das professoras os alunos conseguiam organizar a informação, seguir organizadamente uma estratégia e criticar as soluções obtidas. Como refere a outra professora:

> "Na resolução de problemas as dificuldades ainda eram grandes. Os alunos precisavam de ser ajudados a clarificar o problema e incentivados a fazer tentativas. Resolver por tentativa-erro, construir uma tabela ou fazer um esquema, era como que usar outra Matemática. Sentiu-se que à medida que iam resolvendo mais problemas esta ideia se foi transformando, mas muitos alunos estavam longe de sem ajuda, conseguirem resolver a maior parte dos problemas."

Outro aspecto em que se sentiam ainda muitas dificuldades era na apresentação escrita da resolução de um problema. A ideia que se adoptou, apresentação da resolução de um problema através de um ensaio escrito, foi baseada numa proposta apresentada por Kilpatrick (1991). Assim, os alunos eram incentivados a elaborar um pequeno texto em que apresentassem de uma forma clara o que permitiu chegar à solução do problema e as razões porque a consideravam correcta. Como refere Kilpatrick, a elaboração de um ensaio destaca a necessidade de olhar para trás analisando o que já se fez e construir uma comunicação clara disso. Mas ao longo deste trabalho, verificou-se que esta parecia ser uma ideia particularmente difícil para os alunos. Assim, as resoluções apresentadas não englobavam regra geral uma justificação clara das razões porque é que aquela resposta servia nem conseguiam incluir uma descrição clara dos aspectos que permitiam chegar àquela solução. Por exemplo, no problema da Escola de Samba (ficha 4), onde alguns grupos, enquanto trabalhavam, experimentaram vários valores e foram tirando conclusões das experiências que realizaram, as resoluções apresentadas foram semelhantes à seguinte, proposta por um dos grupos:

> "A Escola tinha 25 elementos, porque 5x5 dá 25, 4x6 dá 24, 3x8 dá 24 e 2x12 também dá 24."

Para além de não ser clara a justificação de porque é que a solução serve, a verdade é que a sua leitura não esclarece as relações que se foram estabelecendo e que permitiram chegar àquela solução. Por exemplo, o facto de só servirem os números terminados em 5 não é justificado nem é feita qualquer referência ao processo de testagem sucessiva de números terminados em 5.

Assim, para além das dificuldades em resolver por si sós alguns dos problemas, as resoluções que apresentavam por escrito não traduziam algumas ideias importantes que ajudavam a resolver o problema nem justificavam, de uma forma clara, a solução apresentada.

Em conclusão, relativamente à resolução de um problema, embora ainda com algumas dificuldades, os alunos melhoraram bastante em relação a alguns aspectos. Discutiam os problemas tentanto interpretar o seu enunciado e faziam, sem pedirem de imediato ajuda às professoras, várias tentativas que pudessem levar à sua resolução. Ao ser-lhes pedido que elaborassem um ensaio escrito que apresentasse de uma forma clara a solução do problema e as razões que os levavam a considerá-la como correcta, os alunos tiveram muitas dificuldades. De uma forma geral, não conseguiam indicar as razões que os levavam a considerar a resposta correcta nem descreviam os aspectos que tinham analisado e que permitiam chegar à solução.

A Calculadora

Desde o início, o facto de poderem usar uma calculadora foi um motivo de entusiasmo para os alunos.

Era com grande desembaraço que usavam a máquina tentando resolver as questões que lhes eram propostas. A utilização correcta de algumas das potencialidades da máquina nunca ofereceu dificuldades de maior aos alunos. Por exemplo, a partir do momento em que as professoras apresentaram a forma como poderiam utilizar as constantes, os alunos passaram a utilizar esta potencialidade da calculadora sempre que tal se justificava.

No entanto, alguns alunos da turma B usavam-na inicialmente de uma forma pouco criteriosa: mal liam o enunciado de uma questão, pegavam na calculadora, introduziam valores e efectuavam operações. Como que esperavam que, com alguma persistência, e sem pensar muito no que estavam a fazer, a calculadora lhes permitisse resolver todas as questões apresentadas. Só perante o insucesso desta forma de organizar o trabalho é que foram abandonando esta atitude.

Embora os alunos tenham conseguido facilmente integrar correctamente a calculadora na forma como organizavam o seu trabalho - pensando primeiro nas questões e analisando os resultados dos cálculos que efectuavam na máquina - muitas das vezes tinham que repetir várias operações porque se esqueciam de manter o registo escrito dos resultados que iam obtendo. No entanto, com a continuação do trabalho, foram melhorando bastante em relação a este aspecto.

Em conclusão, desde o início da experiência que os alunos manifestaram entusiasmo e facilidade na utilização da calculadora. No entanto, inicialmente alguns alunos da turma B como que "esperavam" que a introdução sucessiva de valores e operações na máquina resolvesse as questões que lhes eram apresentadas. Todos os alunos passaram a integrar de uma forma bastante correcta o uso da calculadora no processo de resolução das questões apresentadas. Contudo, o cuidado em registar por escrito os resultados que iam obtendo com a calculadora, foi um aspecto que teve de ser trabalhado.

A Segunda Parte do Estudo

Embora a descrição e análise dos dados relativos às questões levantadas no problema do estudo seja feita detalhadamente no capítulo seguinte, torna-se importante referir alguns aspectos de carácter mais geral inerentes ao desenvolvimento da experiência.

Em primeiro lugar o tempo de que se dispôs para a exploração de situações problemáticas e resolução de problemas foi menor do que inicialmente se pretendia. Reflectindo sobre esta questão as professoras apontaram alguns factores que se passam a referir. Um deles prende-se com aspectos que implicaram uma descontinuidade no trabalho que se realizava com os alunos. Assim, por diversos motivos (realização da PGA nas escolas, greves dos alunos e visitas de estudo) a turma A teve menos 3 aulas de duas horas e 2 de 1 hora e a turma B teve menos 3 aulas de duas horas e 4 de uma hora do que as inicialmente previstas. Por outro lado, a resolução de actividades não rotineiras em que se pretende que os alunos experimentem e discutam processos, envolve sempre um maior dispêndio de tempo.

Também o cumprimento do programa oficial para o 7º ano de escolaridade levantou algumas questões que se reflectiram na experiência de trabalho realizada com os alunos. É no entanto de referir que a posição das duas professoras em relação a este aspecto sempre foi diferente. A professora da turma A era muito crítica em relação à importância de alguns temas do programa, nomeadamente a importância atribuída ao treino de técnicas rotineiras. Por outro lado, na sua escola, todos os restantes professores de Matemática que leccionavam 7º ano foram colocados depois do início do ano lectivo e portanto nunca se verificou uma situação em que ela sentisse estar mais atrasada na matéria dada do que os restantes colegas. Para além disto, esta professora sempre pensou ficar com a turma no ano seguinte, o que lhe permitiria abordar alguns aspectos eventualmente não trabalhados ao longo deste ano.

A professora da turma B, embora considerasse claramente que as actividades desenvolvidas com os alunos eram bastante importantes, não tinha uma posição tão crítica em relação à importância de alguns pontos do programa oficial. Também, comparativamente com os outros professores de 7º ano da sua escola, esteve sempre atrasada na matéria dada.

Esta situação influenciou, em parte, o desenvolvimento do trabalho realizado sobretudo a partir do início de Março. Assim, a interligação entre as aulas de uma e de duas horas nem sempre foi tão conseguida, uma vez que se tornava necessário avançar em alguns pontos do programa.

O ambiente de trabalho vivido ao longo desta fase do estudo é outro aspecto que importa realçar. Embora com algumas diferenças ao nível das duas turmas, de uma forma geral os alunos interessavam-se bastante pelo trabalho e envolviam-se na resolução das actividades propostas com visível interesse e entusiasmo. Notou-se mesmo que passaram a manifestar uma nítida preferência pelas aulas em que lhes eram apresentadas actividades para resolverem em pequenos grupos. Por exemplo, na turma A, no início de cada aula alguns alunos perguntavam invariavelmente à professora: "hoje vamos trabalhar em grupo?". Se a professora lhes respondia afirmativamente mostravam um visível contentamento. Também na turma B, os alunos manifestaram várias vezes a sua preferência por este tipo de trabalho. O seguinte comentário de uma aluna é disto um exemplo:

> "Nestas aulas acabamos por nos interessar mais porque podemos ser nós a tentar resolver as coisas. Não temos que estar só a ouvir o professor e a copiar coisas do quadro"

Em várias aulas de duas horas, entusiasmados com o trabalho, os alunos preferiram não fazer intervalo. Quando tal se verificou as professoras optaram por os deixar continuar a trabalhar. No entanto, o facto dos alunos não saírem para o intervalou começou a provocar um certo cansaço nos alunos no final das duas horas, o que levou as professoras a só deixarem os alunos não interromper o trabalho quando eram estes a pedi-lo. O envolvimente dos alunos nas actividades propostas levou mesmo a que em muitas ocasiões eles nem se apercebessem que já tinha tocado para a saída. Embora isto se verificasse sobretudo na turma A, também na turma B em várias ocasiões alguns alunos preferiram acabar o trabalho que estavam a fazer durante parte do intervalo.

Assim, em conclusão, devido a uma série de condicionantes, o número de aulas desta experiência acabou por ser inferior ao inicialmente previsto. Para além disto, a exploração de situações problemáticas e da resolução de problemas, implicam um dispêndio de tempo significativo. Tudo isto levou a que as propostas de trabalho que puderam ser trabalhadas com os alunos foram em menor número do que as inicialmente previstas. Diversos factores influenciaram posições diferentes das professoras em relação ao cumprimento de alguns pontos do programa. Na tentativa de conciliar os vários aspectos que esta questão levantou, a partir do início de Março, houve uma certa descontinuidade entre o trabalho realizado nas aulas de duas horas e nas de uma hora. Finalmente, nesta parte do estudo, o ambiente de trabalho vivido sobretudo nas aulas de trabalho em grupo, foi bastante estimulante. Embora com algumas diferenças, os alunos das duas turmas empenhavam-se activamente e com visível interesse no trabalho que realizavam.

C A P Í T U L O 5

ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo descrevem-se e analisam-se os dados relativos ao problema do estudo. Está subdividido em quatro secções: (a) a resolução de problemas; (b) a formulação de problemas; (c) a calculadora; e (d) o trabalho em grupo.

A Resolução de Problemas

Na segunda fase do estudo a resolução de problemas foi trabalhada de uma forma mais sistemática. Nas aulas de duas horas foram apresentados vários problema para os alunos resolverem. Nestas aulas procurou-se criar um clima que incentivasse o gosto pela resolução de problemas, dando tempo aos alunos para os resolverem, ajudando a reflectir no trabalho que iam realizando e encorajando as tentativas que iam fazendo. No final de cada uma destas aulas, havia uma pequena discussão em torno do trabalho realizado, eram comparadas estratégias usadas pelos alunos e discutidas eventuais extensões dos problemas.

A descrição e análise que a seguir se apresenta é baseada nos registos das observações das aulas, nas resoluções escritas de cada problema apresentadas pelos alunos e nos registos das reuniões semanais com as duas professoras.

Ficha 14 - Às Voltas com o Futebol

Nesta ficha os alunos exploraram um quadro resumo dos resultados do campeonato de futebol da primeira divisão. Na sua maioria, a primeira reacção foi de grande entusiasmo. Assim, mesmo nos grupos em que algum aluno dizia não perceber nada de futebol, o entusiasmo dos seus colegas conseguiu contagiá-lo. Este entusiasmo continuou ao longo da resolução de toda a ficha. Quando tocou para o intervalo entre as duas horas de aula, vários alunos perguntaram:

> "Já está a tocar? Podemos ficar a trabalhar durante o intervalo?"

A primeira questão da ficha, que correspondia a obter 14 pontos em 15 jogos, apesar de muitos grupos terem gasto um certo tempo para a resolverem, foi facilmente percebida pelos alunos. De facto, os alunos perceberam o que se pedia e o que deveriam fazer mas ficou-se com a ideia de que foi com as várias tentativas que foram realizando que perceberam a forma como o quadro apresentado nesta ficha tinha sido construído. Na resolução desta questão vários grupos não se contentaram em apresentar uma solução e tiveram em conta o facto de ela ser ou não plausível. Por exemplo, a solução que ocorreu de imediato a muitos grupos, de ter empatado todos os jogos e perdido um, foi imediatamente regeitada por ser pouco provável que tal se pudesse verificar. Depois começaram uma série de tentativas que a maioria dos grupos organizou de uma forma correcta. Assim, primeiro procuravam encontrar uma situação de número de jogos ganhos, empatados e perdidos que permitisse obter 14 pontos. Depois procuravam estabelecer os resultados para cada um dos jogos de forma a obterem o número certo de golos marcados e sofridos. A exploração de várias hipóteses, entusiasmou de tal forma alguns grupos que só passaram para a questão seguinte quando a professora lhes chamou a atenção para o facto de se estarem a atrasar muito na resolução da ficha.

Na segunda questão, a justificação da relação encontrada não foi imediata para os alunos. A dificuldade da maioria dos alunos esteve sobretudo no facto de pensarem que a igualdade entre o número total de golos marcados e sofridos poderia ser casual. Só quando as professoras perguntaram "será possível que estes valores não sejam iguais?" os alunos, ao começarem a averiguar se tal poderia acontecer, foram começando a desconfiar de que a relação talvez se verificasse mesmo e do porquê da igualdade. Os caminhos seguidos pelos grupos foram diferentes. Uns tiveram necessidade de começar a acrescentar resultados de mais jogos, outros começaram a construir um quadro idêntico ao apresentado mas com poucas equipas. Assim, a maioria dos grupos conseguiu perceber a situação a partir do momento em que actuou sobre ela. As justificações apresentadas pelos alunos foram muito semelhantes entre si. Uma das apresentadas foi a seguinte:

> "A soma de todos os golos marcados e sofridos é igual porque sempre que uma equipa marca um golo, outra sofre esse golo"

Nas duas questões seguintes, surgiram pela primeira vez números negativos e a ordenação em Z. Os alunos mostraram um grande desembaraço na sua resolução não tendo constituído nenhum obstáculo o facto de nunca terem trabalhado com números negativos.

No problema sobre o campeonato de futebol havia três aspectos em causa: (1) perceber o número de jogos que se realizavam, (2) elaborar correctamente um quadro em que constassem as pontuações, os golos marcados e sofridos por cada equipa; (3) organizar um ensaio que pudesse ser uma notícia, a publicar no jornal da escola, sobre o torneio de futebol e em que justificassem as conclusões a que tinham chegado em (1) e (2).

O segundo aspecto correspondia a um desempenho mais mecânico, pois a construção do quadro pedido obedecia a uma lei que os alunos tiveram oportunidade de perceber através da resolução das questões anteriores. O terceiro aspecto além de constituir a tradução da resolução do problema através de um ensaio escrito, tentava criar uma situação em que os alunos realçassem as principais conclusões da situação que tinham imaginado. Assim, na primeira alínea os alunos podiam resolver o problema sem se preocuparem com a sua apresentação escrita, mas na segunda alínea deviam integrar os aspectos relativos à organização do torneio e à forma como ele tinha decorrido, organizando uma comunicação clara que pudesse constituir uma notícia a publicar no jornal da escola.

Ao discutirem o número de jogos que se realizaram, a primeira reacção de muitos dos alunos foi ainda de indicarem um número que aparentemente não tinha sido objecto de grande reflexão. Mas ao discutirem os diferentes valores sugeridos no grupo, começaram a organizar melhor o que pensaram e a perceber se tinham ou não cometido algum erro. Assim, na maioria dos grupos, para perceberem o número de jogos realizados no torneio os alunos, depois de atribuírem letras às turmas que participaram no torneio, elaboram um processo de contagem do tipo:

> "A - B; A - C; A - D
> B - C; B - D
> C - D
>
> 6 jogos."

Ao chegarem a esta conclusão, a maioria dos alunos percebeu o processo que lhe permitia calcular o número de jogos para um número de equipas diferente. A pergunta das professoras: "e se fossem 6 equipas? e se fossem 20?", após uma pequena reflexão, foi facilmente respondida.

Por exemplo, um aluno justificou oralmente a sua resposta:

> "Se fossem 6 eqipas, a primeira jogava com todas as outras, logo temos 5 jogos. Para a segunda equipa temos 4 jogos porque já se contou o jogo com a primeira equipa. Para a terceira é 4-1. Então é 5+4+3+2+1"

Outras generalizações, com um número superior de equipas, foram também facilmente feitas pela maioria dos grupos.

Para elaborarem o quadro com as pontuações e com os golos marcados e sofridos, depois de alguma reflexão, alguns alunos decidiram quais os resultados obtidos em cada jogo e a partir daqui elaboraram o quadro. Por exemplo, um grupo registou o trabalho da seguinte forma:

"A - B 2 - 1
A - C 1 - 1
A - D 0 - 1
B - C 0 - 1
B - D 1 - 1
D - C 1 - 1

E.	P.	G.M.	G.S.
C	4	3	2
D	4	3	2
A	3	3	3
B	1	2	4"

Outros alunos seguiram um processo mais rápido. Assim, sem pensarem nos resultados de cada jogo, decidiram de uma forma coerente o número de vitórias, empates e derrotas de cada equipa e calcularam a respectiva pontuação. Depois, ao construirem o quadro, tiveram em conta as conclusões a que tinham chegado anteriormente (a soma da coluna dos golos marcados e dos golos sofridos é igual e há uma certa lógica na ordenação das equipas consoante o valor do seu *goal average*).

No ensaio escrito procurava-se que, a propósito de uma situação que parecia poder entusiasmar mais os alunos, eles explicassem a forma como resolveram o problema. No entanto, podiam também incluir algumas referências a aspectos mais desportivos.

Os ensaios apresentados pelos alunos foram analisados numa reunião de trabalho com as professoras. Em relação à determinação correcta do número de jogos e da construção do quadro, verificou-se que os alunos tinham obtido resultados correctos. Mas em relação ao texto que apresentaram, constatou-se que fundamentalmente se poderiam considerar dois tipos: uns eram um relato exaustivo do que se tinha passado em cada jogo, outros, eram uma apresentação do número de jogos realizados e do quadro das pontuações acompanhado de uma espécie de legenda que apoiava a sua leitura. No primeiro caso os textos eram massudos, não explicavam as regras do torneio (o que envolvia a explicação do número de jogos realizados e a forma de pontuar cada equipa) nem conseguiam destacar ideias que podiam ser tomadas como principais no relato do torneio. Pareceu que os alunos assumiram como justificados os dois aspectos anteriores e portanto o ensaio era apenas uma descrição do que eles podiam imaginar ter ocorrido em cada jogo. Por exemplo, o texto seguinte, apresentado por um dos grupos, depois de uma introdução, descreve o resultado obtido em cada jogo e termina com uma pequena referência às pontuações obtidas por cada equipa:

> "Na Escola Secundária do Barreiro decorreu um torneio com quatro equipas que pertenciam ao 7º ano. O torneio foi constituído por 6 jogos. No primeiro jogo entre as equipas A e B ganhou a equipa A por 2-0.
> No segundo jogo ... No terceiro jogo ...
> No final do torneio ganhou a equipa A com 6 pontos porque ganhou três vezes. Em segundo lugar ficou a equipa B com três pontos. Em terceiro lugar a C com dois pontos e em último lugar ficou a turma D com um ponto."

Outros grupos apresentaram um texto que não era propriamente um ensaio. Assim, indicavam o número de jogos realizados sem que o justificassem e apresentavam um quadro de pontuações seguido de uma breve referência ao significado de cada coluna. Por exemplo, um grupo apresentou o seguinte trabalho:

"Realizaram-se 6 jogos.

Equipa	Pontos	Golos Marca.	Golos Sofri.
B	6	12	1
D	3	5	7
A	2	3	5
C	1	2	9

Nós construímos este quadro pondo as quatro equipas, os pontos de cada equipa, os golos marcados e os golos sofridos. Com a ajuda da tabela da ficha, pusemos os números nos seus lugares."

Nos grupos que apresentaram um trabalho deste tipo, a ideia de um ensaio que pudesse traduzir aspectos fundamentais do torneio, não foi agarrada. Pelo contrário, estes grupos resumiram-se a fazer uma breve refência às conclusões a que tinham chegado sem que elas tenham sido devidamente justificadas.

Nos trabalhos incluídos no primeiro grupo, o contexto "desportivo" é preponderante e os aspectos matemáticos quase que não são referidos. O relato do que se passou em cada jogo é de tal forma realçado, que o texto apresentado é demasiado massudo e não consegue dar a ideia das questões fundamentais a realçar numa notícia sobre um torneio desportivo. Nos trabalhos incluídos no segundo grupo, não se pode falar propriamente de ensaio. Os alunos resumem-se a apresentar os resultados a que chegaram seguidos de um pequeno texto que é uma ajuda para a leitura do quadro das pontuações que eles construiram.

Ainda na reunião de trabalho com as professoras, decidiu-se entregar os ensaios a cada grupo com uma breve apreciação que resumia os aspectos anteriormente referidos e apresentar algumas sugestões que poderiam melhorar o trabalho apresentado: explicação das regras do torneio e do número de jogos que se realizaram, integração lógica no texto do quadro das pontuações obtido na alínea anterior e da forma como ele foi elaborado e o destacar do vencedor ou de outra equipa ou situação que se tenham salientado por algum motivo. Foi dado a cada grupo o prazo de 4 dias para entrega das reformulação destes ensaios.

Na reunião em que as reformulações foram analisadas, verificou-se que todos os grupos conseguiram melhorar os ensaios que tinham apresentado, sobretudo ao nível da clareza do texto e da integração do quadro das pontuações. Por exemplo um grupo apresentou o seguinte ensaio:

> "No relvado da Escola Secundária do Barreiro realizou-se esta semana um torneio de futebol entre as quatro turmas de futebol da 7º Ano.
> Entre as quatro equipas, realizaram-se 6 jogos tendo cada equipa jogado 3 jogos.
> No quadro seguinte podem-se ver as pontuações obtidas por cada equipa, os golos marcados e os golos sofridos.
>
> | E. | P. | G.M. | G.S. |
> |---|---|---|---|
> | C | 4 | 3 | 2 |
> | D | 4 | 3 | 2 |
> | A | 3 | 3 | 3 |
> | B | 1 | 2 | 4 |
>
> Depois de um árduo jogo entre as equipas C e D, estas turmas acabaram empatadas no primeiro lugar.
> A equipa B jogou bem, mas jogar bem não chegou pois só conseguiu marcar 2 golos tendo sofrido 4."

No entanto, apesar de ser visívivel um certo progresso, vários aspectos podem ser questionados. Em primeiro lugar. o objectivo de que o ensaio pudesse traduzir a resolução do problema apresentado aos alunos, não foi de facto conseguido. Desde o início do ano que as professoras tinham chamado a atenção para a necessidade de os alunos apresentarem um texto justificando os motivos porque a solução está correcta e explicando as ideias principais que os levaram a encontrar aquela solução. Mas, como já foi referido, este foi um aspecto em que os alunos continuaram a ter sempre algumas dificuldades. Em muitos casos, enquanto trabalhavam em grupo um problema, até seguiam caminhos inesperados e chegavam a conclusões interessantes, mas a riqueza desse trabalho não era traduzida na apresentação escrita.

Nesta ficha, a ideia de traduzir a resolução de um problema através de um ensaio, que neste caso poderia constituir uma notícia a publicar num jornal da escola, parecia prometedora no sentido de melhorar o trabalho escrito dos alunos. No entanto, verificou-se que as dificuldades dos alunos ainda ficaram acrescidas. Os principais aspectos da organização do torneio não foram descritos e justificados e na organização da notícia, os alunos continuaram a ter dificuldades na clareza do enunciado e na ligação das ideias.

Ao analisar estas questões numa reunião de trabalho com as professoras, concluiu-se que, embora a ideia do ensaio escrito continuasse a ser considerada como muito interessante, ela parecia estar a levantar dificuldades aos alunos, que para serem ultrapassadas, pareciam exigir um certo dispêndio de tempo e de esforço focado neste aspecto. Ora, tendo em conta que em relação à capacidade de resolver problemas muitos alunos estavam ainda a dar os primeiros passos, decidiu-se alterar o que se devia pedir como apresentação da resolução escrita de um problema. Assim, foi abandonada a ideia do ensaio escrito, e passou a ser pedido aos alunos que apresentassem claramente os dados dos problemas, as tentativas de resolução que faziam, a forma como implementavam as estratégias seguidas e as soluções a que chegavam. Não se colocava assim a ênfase em olhar para trás e organizar uma comunicação clara da resolução passando antes a ser pedido que os alunos mostrassem no seu trabalho o que foram pensando enquanto resolviam o problema.

Em conclusão, ao longo da resolução desta ficha, os alunos entusiasmaram-se pelo trabalho e conseguiram resolver as questões colocadas com alguma facilidade, embora ainda precisando de algumas sugestões das professoras. A resolução do problema do torneio de futebol não ofereceu dificuldades de maior aos alunos. Embora alguns ainda tenham necessitado de uma certa ajuda das professoras, determinaram correctamente o número de jogos do torneio e conseguiram construir um quadro das pontuações.

A análise dos ensaios e das suas reformulações, originou uma reflexão com as professoras, em relação ao que se deveria pedir como apresentação da resolução escrita de um problema. Apesar de até agora se ter insistido com os alunos no ensaio escrito, e de se ter pensado que a organização de uma notícia pudesse ajudar os alunos a melhorar em relação a este aspecto, pudesse ajudar os alunos a melhorar em relação a este aspecto, tal não se verificou. Continuando-se a a considerar que o ensaio escrito, uma vez que realça uma reflexão sobre as ideias que permitiram chegar à resolução do problema, poderá ser noutras condições uma aposta interessante em relação à resolução de problemas, decidiu-se abandonar esta ideia. Como muitos dos alunos ainda evidenciavam algumas dificuldades em relação à resolução de problemas, considerou-se prioritário dar atenção a este aspecto, não os sobrecarregando com a elaboração de um ensaio escrito, uma vez que a sua realização parecia ser particularmente difícil para eles. Assim, ao apresentarem por escrito a resolução de um problema, passou a ser pedido aos alunos que indicassem com clareza os dados dos problemas, as suas tentativas de resolução, a forma como implementavam as estratégias seguidas e as soluções a que chegavam.

Ficha 15 — Testes e mais Testes

A partir da pontuação de um teste pretendia-se que os alunos apresentassem possíveis situações que permitissem obter determinada classificação.

Com o auxílio da calculadora e usando uma estratégia de tentativa e erro, os alunos resolveram com facilidade e entusiasmo os problemas. As resoluções diferiram apenas no registo, mais ou menos completo, das várias tentativas feitas. Por exemplo, um grupo escreveu:

```
"1.  90 - 7
     80 -14
     70 -21
```

O António acertou sete perguntas e errou 3 porque
70 - 21 = 49

2. 30 - 21
   40 - 14

A Ana errou duas perguntas porque 40 - 14 = 26"

Na turma A, com o auxílio da calculadora, todos os grupos organizaram logicamente o trabalho a partir da primeira tentativa que realizavam. Por exemplo, um grupo calculou a pontuação obtida ao certar 9 perguntas e errar 1. A partir da análise do valor obtido decidiram diminuir o número de perguntas certas e aumentar o número de perguntas erradas até encontrarem o valor pretendido. Na turma B, este processo sistemático não é usado por todos os grupos. Assim, alguns grupos, ainda usam um processo de tentativa e erro não organizado em que os resultados de uma tentativa não são analisados para a realização de uma nova tentativa. Alguns alunos desta turma ainda se "agarram" à calculadora e procuram, de uma forma desorganizada testar várias hipóteses até obter a solução pretendida. No entanto, trabalham persistentemente até encontrarem a solução.

No primeiro problema todos os alunos só analisaram a situação de ter respondido a todas as perguntas do teste.. Esta tinha sido a única hipótese que se tinha colocado até aqui, uma vez que a resolução do teste que anteriormente tinham cotado, correspondia a uma situação em que estavam respondidas todas as perguntas. Mas quando no problema seguinte a situação é alargada para a hipótese de se deixarem em branco algumas perguntas, nenhum grupo toma a iniciativa de voltar ao primeiro problema e analisar se ele tem mais soluções. Na discussão com toda a turma da resolução destes problemas (que só foi feita na aula de 2 horas seguinte, uma vez que os alunos só acabaram a formulação do problema, pedido na pergunta 3, no final da aula), as duas professoras salientam este aspecto que também se integrou na exploração feita em torno da formulação de problemas.

Partindo das resoluções dos alunos, as professoras realçaram a vantagem de, em vez de fazer ensaios desordenados, fazer uma tentativa com base no resultado da tentativa anterior. A necessidade de registar por escrito as várias tentativas realizadas é também realçada pelas professoras.

Assim, de uma forma geral todos os alunos resolveram os problemas da ficha com bastante facilidade e entusiasmo. Nos alunos da turma A já é visível uma utilização bastante adequada da estratégia de tentativa e erro organizada para a resolução de um problema. As experiências feitas com a calculadora são registadas no papel, o que permite a análise de cada ensaio com vista à determinação dos ensaios posteriores. Na turma B, pelo contrário, vários alunos ainda utilizam uma estratégia de tentativa e erro desorganizada. Nas duas turmas, apesar do visível entusiasmo com o trabalho que realizam, os alunos ainda se situam a um nível pouco profundo da análise de um problema. Naturalmente, a partir do momento em que encontram uma solução para o problema não procuram averiguar da existência de mais soluções. Tal preocupação só lhes surge quando as professoras os questionam neste sentido.

Ficha 17 - Tiro ao Alvo

Nesta ficha pretendia-se que os alunos resolvessem problemas relativos a pontuações possíveis num jogo de tiro ao alvo. Estava sobretudo em causa a realização de várias experiências que envolviam a soma de números inteiros positivos e negativos.

Na turma A, com o auxílio da calculadora e usando correctamente uma estratégia de tentativa e erro, os alunos resolvem sem grandes dificuldades as questões apresentadas. Por outro lado alguns alunos fazem uma certa selecção das tentativas que vão fazer. Por exemplo, um grupo ao tentar obter 0 pontos com 6 tiros, antes de começar a procurar uma possível combinação de valores, procura reduzir à partida o número de tentativas. Um aluno chama a atenção:

> "Como queremos ter 0 pontos, a seta tem que falhar o alvo. Se falhar só uma vez temos que fazer 75 pontos positivos com 5 tiros."

Vão então verificar se é possível encontrar este resultado. Ao concluirem que não, passam a admitir que não acertou cinco vezes no alvo e portanto têm que averiguar se é possível obter 150 pontos com 4 tiros. Continuam a organizar o trabalho desta forma até encontrarem uma combinação que responda à pergunta.

Por outro lado, ao longo da resolução desta ficha começa a notar-se que vários grupos desta turma já não se contentam em apresentar uma possível solução do problema. Pelo contrário só dão por concluído o trabalho depois de tentarem analisar se há ou não mais soluções. Também a preocupação em justificar as conclusões que apresentam começa a acentuar-se. Por exemplo, para justificar que na situação do problema 3 não era possível obter 450 pontos com 5 tiros ou menos, um grupo argumenta:

> "Como 5 tiros já não se pode ter 450 pontos porque como 100 é a pontuação máxima podia acertar quatro vezes no 100, mas com um tiro não se pode ter 50 pontos. Ainda com mais razão não é possível ter 450 pontos com menos de 5 tiros. Se a Isabel tivesse mais de 7 setas é que havia muitas maneiras de ter 450 pontos."

No entanto, para muitos dos alunos da turma B, o facto de encontrarem uma solução para o problema, determina a passagem ao problema seguinte. Entusiasmam-se na resolução do problema, mas só analisam mais profundamente a situação estudada quando a professora os incentiva a tal. Embora em relação a este aspecto, vários grupos comecem a melhorar visivelmente, outros só com a ajuda da professoara conseguem definir um processo mais sistemático apoiado nas tentativas que vão realizando com a calculadora. Na reflexão com toda a turma esta questão é novamente realçada pela professora da turma B.

Em conclusão, nas duas turmas é cada vez mais visível a capacidade que os alunos têm de trabalhar em pequenos grupos sem solicitar a ajuda das professoras. Também o entusiasmo com o trabalho é cada vez maior. Pensar nas questões e nos problemas apresentados é interessante para a maioria dos alunos. Na turma A o nível de profundidade que os alunos começam a revelar na resolução das questões que lhes são propostas é já considerável. Estes alunos manifestam facilidade na interpretação dos enunciados, na procura sistemática e bem organizada de soluções e no cuidado que colocam nas justificações das suas respostas. Na turma B, a maioria dos alunos apesar de conseguir resolver sozinha os problemas apresentados, ainda tem dificuldades na organização do trabalho e na justificação das suas afirmações.

Ficha 20 - Ida da Terra à Lua

A reacção inicial a este problema foi de um grande entusiasmo misturado com uma grande sentimento de quase impossibilidade. Incentivados pelas professoras a proporem de imediato um número que lhes parecesse razoável para o número de dobragens necessárias, surgem números muito grandes. Para os alunos, tudo o que fosse menos de 1000 dobragens era muito pouco e mesmo assim alguns achavam mesmo que só com 50000 ou 100000 dobragens se poderia percorrer uma distância tão grande.

Quando começaram a pensar em grupo na forma como deveriam resolver o problema, um processo de resolução surge facilmente em todos os grupos. Mesmo para os grupos que começam por pensar erradamente que de uma dobragem para a outra se soma sempre a espessura da folha, bastou que as professoras manifestassem uma leve dúvida se de facto seria assim, para concluirem que estavam a pensar mal. Alguns grupos pegam em folhas de papel e fazem dobragens sucessivas registando a espessura com que vão ficando, outros organizam uma tabela com o número de dobragens e a espessura correspondente. A forma como podem resolver o problema é agora clara para os alunos. Assim, com o auxílio da calculadora e usando o factor constante, os alunos começam a contar as dobragens. A maior parte dos grupos parte da espessura inicial da folha e calcula a espessura que obtém em dobragens sucessivas. No entanto, dois grupos propoem "desdobrar" sucessivamente ao meio a distância da Terra à Lua até chegarem à espessura da folha de papel. Mas como deparam com a dificuldade de a calculadora não ter capacidade para um número com 12 dígitos, optam por introduzir a espessura da folha de papel e multiplicar sucessivamente por dois. Apercebem-se que apenas adiaram o problema, mas como o que pensam fazer é, a partir de certa altura, fazer os cálculos à mão, consideram que sempre é mais fácil multiplicar que dividir.

Um grupo, a partir do momento em que lhe surgiu números com mais de 8 dígitos, tomou a iniciativa de continuar a trabalhar com um valor aproximado por defeito aos kilómetros. Todos os outros, continuaram as contas à mão.

Depois de terem resolvido o problema, o "choque" de terem encontrado um número tão diferente do esperado foi grande. Surgiram de imediato comentários do tipo:

> "Não pode ser. Enganámo-nos a resolver o problema."
>
> "É impossível que dê um número tão pequeno."

Houve mesmo alguns grupos que só aceitaram a solução depois de confirmarem todos os cálculos efectuados. Só então a justificação de que a solução fosse um número tão pequeno começou a surgir. Como comentava um aluno com os seus colegas de grupo:

"A princípio engana porque com milímetros aumenta pouco. Mas quando chegamos aos kilómetros dobrar uma vez já aumenta muito."

Ao longo da resolução deste problema, o comportamento das duas turmas foi bastante semelhante. A única diferença observada teve a ver com a facilidade em compreender o problema. Assim, na turma B alguns grupos ainda precisaram de que a professora fizesse observações do tipo: "peguem numa folha e experimentem a dobrar" ou "se dobrar 3 vezes, com que espessura ficamos?". De resto, o entusiasmo posto no trabalho, a forma como organizaram a informação e a resolução do problema, o espanto com a solução encontrada e as explicações que justificavam o facto desta ser um valor tão diferente do esperado, foram muito semelhantes nas duas turmas.

No final da resolução deste problema, as professoras discutiram com os alunos se a estratégia de tomar um valor aproximado (que foi seguida por um grupo da turma A), seria uma boa medida. Alguns defenderam que assim não poderiam ter a certeza de ter encontrado a solução correcta, uma vez que mesmo desprezar um valor pequenos, nas dobragens sucessivas, esse valor ficaria muito maior. Mas outros consideraram que de qualquer forma se ficaria com uma solução muito próxima da verdadeira e se tinha a vantagem de não terem que demorar tanto tempo a fazer contas.

Assim, este problema entusiasmou bastante os alunos das duas turmas que não tiveram dificuldades ao nível da sua compreensão e resolução. O facto de as calculadoras de que os alunos dispunham não terem capacidade para números com mais de 8 dígitos, embora tenha implicado um dispêndio de mais tempo para resolver o problema, não atrapalhou os alunos nem diminuiu o interesse na procura da solução do problema. Talvez por a solução encontrada ser tão diferente da esperada, muitos grupos tomaram a iniciativa de a verificar e de analisar a razão de tão grande disparidade com o valor que inicialmente tinham estimado.

Ficha 21 – Uma Escolha Difícil

Também ao longo da resolução deste problema os alunos revelaram grande facilidade e entusiasmo. Antes de começarem a resolver o problema, apesar das conclusões a que tinham chegado com o problema anterior, todos os grupos acharam mais vantajosa a hipótese A. No entanto alguns alunos hesitaram. Como referiu um deles:

> "Mas a partir de certa altura, com a outra hipótese aumenta-se muito."

Nos grupos em que foi levantada esta questão, os colegas contestaram esta ideia argumentando que nesta situação as quantias iniciais em cada hipótese eram muito diferentes e também porque 12 meses parecia pouco para compensar a diferença no crescimento das mesadas.

Depois deste primeiro palpite, resolveram facilmente o problema com a ajuda da calculadora. Alguns deles referiram: "Basta fazermos o mesmo que para o problema da Terra à Lua". Todos os alunos organizaram uma tabela em que registaram as quantias que iam obtendo para cada mês (usando a parcela ou o factor constante) e no final somaram estes valores. Na apresentação da resolução por escrito, os alunos tiveram o cuidado de registar numa tabela todos os valores calculados.

Os resultados obtidos já não os espantaram muito. Mesmo os alunos que inicialmente não tinham relacionado este problema com o problema da ida da Terra à Lua, perante a solução encontrada notaram a semelhança. Houve alunos que ao analisarem a solução relacionaram com outros problemas:

> "Multiplicar faz aumentar muito. Já não me lembro bem como era, mas parece-me que no problema dos grãos de trigo no tabuleiro de xadrez era a mesma coisa."

Foi também interessante verificar que alguns grupos, entusiasmados com o problema, procuraram alterar a hipótese A de forma a que ela passasse a ser a mais vantajosa.

O segundo problema desta ficha colocava a interrogação: será que o facto de o dinheiro ser depositado e de se receber um pequeno juro mensal alteraria a escolha? Portanto a situação em si era muito semelhante à anterior e como nos vários cálculos necessários os alunos utilizaram correctamente a calculadora, resolveram facilmente o problema.

Na discussão com toda a turma, que ocorreu depois dos alunos terem formulado o problema, as professoras realçaram a diferença entre um crescimento aritmético e geométrico. Também foi salientado o modo como a construção de uma tabela ajudava a clarificar o problema e a sua resolução.

Em conclusão, na resolução destes problemas, os alunos não encontraram qualquer dificuldade. Compreenderam facilmente o enunciado e organizaram correctamente um plano para a sua resolução. Apesar do palpite inicial da maioria dos alunos não ser correcto, a solução encontrada já não os espantou muito e conseguiram estabelecer relações entre este problema e outros que já conheciam. Foi visível o cuidado em registar os valores que iam obtendo com a calculadora e em apresentar por escrito todos os valores calculados, os meses a que se referiam e a solução do problema. Também ao longo da resolução deste problema a forma como trabalharam as duas turmas aproximou-se bastante. Ao nível dos relatórios escritos também as resoluções dos alunos da turma B começaram a ser mais completas.

Ficha 22 – Descontos e Impostos

Incentivados pelas professoras a darem um palpite sobre a solução do problema, como seria de esperar, a escolha da melhor hipótese diferiu de grupo para grupo. Para uns, é preferível calcular primeiro o imposto porque, como diziam:

> "Se calcularmos primeiro o imposto o desconto é maior porque é calculado sobre uma quantia maior e então pagamos menos."

Outros, pelo contrário, defenderam que:

> "É melhor calcular primeiro o desconto porque assim paga-se menos imposto."

Qualquer destas ideias, baseadas numa primeira análise da situação, revelam que a maioria dos alunos percebeu facilmente o problema. Antes de começarem a resolver o problema vários alunos reclamam:

> "Como é que podemos calcular percentagens com a máquina de calcular?"

Depois de esclarecida esta questão, é com grande entusiasmo que os alunos vão verificar se a sua ideia inicial está correcta. Não se dão por satisfeitos com os resultados da primeira experiência que realizam. Como comenta um aluno:

> "Pode ser que só com 1000$00 é que dê igual"

Nestes grupos, com o trabalho bastante facilitado pela utilização da calculadora, foi visível a preocupação em realizar bastantes experiências antes de apresentar a conclusão a que chegavam. Só então, a evidência das experiências feitas foi tomada como lei. Por exemplo, um grupo apresentou os valores experimentados e concluiu:

> "A princípio julgámos que se calculássemos primeiro o imposto e depois o desconto era melhor. Mas depois de muitas tentativas, o resultado deu sempre igual. Chegámos à conclusão que só para o comerciante haveria diferença."

Embora não seja verdade que só para o comerciante é que não é indiferente a ordem por que se calcula o imposto e o desconto, este grupo alargou, sem qualquer ajuda, o problema apresentado. Noutros grupos, embora não o tenham explicitado por escrito, pôde-se observar que os alunos fizeram algumas experiências para ver se para o comerciante também seria indiferente. Mas a ideia de que o imposto cobrado não é uma receita para o comerciante não surgiu e os alunos abandonaram esta análise.

Um grupo da turma A procurou mesmo analisar se com outras percentagens de desconto e de imposto a solução seria a mesma. Só após diversas experiências, deram por concluído o trabalho. Como um aluno referiu:

> "Tentámos com vários preços de artigos e dava sempre igual. Mas podia ser que isto só fosse assim para estas percentagens. Mas depois de experimentarmos outras percentagens vimos que também dava sempre igual."

No entanto, sobretudo alguns grupos da turma B, ainda não evidenciam tanta preocupação em realizar várias experiências antes de apresentarem as suas conclusões. Para estes alunos a verificação de 2 ou 3 casos é suficiente para justificar a sua resposta.

Na discussão final com toda a turma foi levantada a questão da demonstração. Numa primeira fase foi analisada a pergunta, que tinha sido colocada por um grupo da turma A: "E se as percentagens de imposto e de desconto, fossem outras?". Perante este desafio, os alunos, entusiasmados, fizeram várias experiências que iam relatando oralmente. Foi então colocada a questão: "Mas como poderemos ter a certeza de que vai ser sempre indiferente?" Os alunos perceberam a ideia e concordaram que apenas poderiam dizer que parecia que a resposta que tinham dado era correcta. Como na turma A alguns alunos manifestaram curiosidade em saber como se poderia garantir que tinham respondido bem à pergunta, a professora avançou para a demonstração. Com a ajuda da professora que foi dialogando com os alunos e organizando o raciocínio, os alunos chegaram à demonstração.

Nas duas turmas as professoras alargaram o problema perguntando: "e também será indiferente para o vendedor? E para quem cobra o imposto?". Estas questões não eram novidade para alguns alunos, que já tinham tentado analisar se para o vendedor seria indiferente a ordem por que se efectuavam os cálculos. Depois de uma discussão acerca de quem fica com o imposto cobrado pelo comerciante, as respostas não se fizeram esperar.

Em conclusão, o entusiasmo dos alunos na resolução deste problema foi grande. Nas duas turmas, após a leitura do enunciado do problema os começam a trabalhar e vão avançando nas suas conclusões sem ajuda das professoras.

Já é significativo o número de alunos que apoia as suas conclusões num grande número de verificações. No entanto, a ideia de que, embora muitos casos pareçam justificar a sua resposta, só uma demonstração poderá garantir a certeza de ter respondido correctamente, só surge por iniciativa das professoras.

Ao longo da resolução, alguns grupos já se conseguem aperceber de possíveis extensões do problema. Surge naturalmente a ideia: e também será indiferente para o comerciante? No entanto só um grupo consegue analisar correctamente esta questão. Os outros grupos em que ela surgiu, não conseguem perceber quem ganha com o imposto cobrado e abandonam esta análise.

Ficha 23 – A Viagem de Comboio

Na resolução deste problema, os alunos deveriam usar os conhecimentos que tinham sobre fracções para interpretar o problema e identificar a solução.

Nas duas turmas, embora nalguns casos discutindo vivamente alguns aspectos, os alunos chegaram à solução com relativa facilidade. No início, em muitos grupos, as posições dos alunos diferiam. Mas depois de cada um explicar as suas ideias, como ainda não havia acordo, muitos grupos tomaram a iniciativa de analisar cada esquema para poderem eliminar os que não correspondiam à solução do problema. Assim, rapidamente resolvem o problema. Por exemplo um grupo, ao justificar a sua resposta escreveu:

> "1º não é porque depois de dormir falta percorrer mais do que enquanto estava a dormir
> 2º não é porque assim tinha percorrido metade do caminho a dormir
> 3º não é porque lhe falta percorrer o mesmo do que enquanto esteve a dormir
> 4º é este porque quando acorda falta percorrer menos do que quando estava a dormir e vendo bem com uma régua o que lhe falta percorrer é metade da parte carregada."

Assim, a novidade deste problema residia em que, pela primeira vez, os alunos tinham que relacionar um determinado enunciado com uma possível tradução sua através de um esquema. Começando por fazer uma análise geral do problema, para conseguirem chegar a um acordo, a maioria dos grupos passa a analisar esquema por esquema, eliminando assim várias hipóteses. Assim, os alunos conseguiram concentrar-se num esquema e analisar os aspectos que identificaram como fundamentais: primeiro faltar mais do que o espaço percorrido enquanto dormiam e depois faltar metade. De uma forma geral, as respostas que apresentaram, são claras e bem justificadas.

Ficha 24 - As Escadas Mágicas

Neste problema estava em causa reconhecer padrões de distribuição numérica, formular conjecturas acerca dessa distribuição, testá-las e encontrar argumentos que garantissem que ela não falhava.

Foi com visível entusiasmo e facilidade que os alunos resolveram este problema.

Neste problema havia dois padrões distintos: um referente às peças metálicas e outro referente ao número de degraus. Em relação ao número de peças metálicas o padrão de distribuição era muito simples. Os alunos, a partir da análise do desenho da ficha facilmente apresentaram conclusões como a seguinte:

> "Basta fazer 2 x nº de degraus para saber o número
> de peças metálicas que são precisas.
> Este processo é correcto porque em cada degrau há
> sempre duas peças metálicas."

Também para encontrar a distribuição do número de ripas necessárias, os alunos não encontraram qualquer dificuldade. A partir do registo numa tabela de cada valor encontrado o padrão foi facilmente encontrado e justificado. Por exemplo, um grupo apresentou o trabalho da seguinte forma:

"nº de degraus nº de ripas

nº de degraus	nº de ripas
2	8
3	11
4	14
5	17
111	335
112	338
20	62
100	302

Para passar de uma escada com 111 degraus para uma com 112 degraus basta somar 3, porque como se vê, quando se acrescenta um degrau precisa-se de mais 3 ripas.
Para calcular o número de ripas necessárias basta calcular o triplo do número de degraus mais dois porque quando se acrescenta um degrau acrescentam-se 3 ripas e há sempre as duas ripas que servem de apoio à escada."

Assim, na resolução deste problema foi evidente em todos os grupos uma grande facilidade e entusiasmo em relação ao trabalho que realizaram. A identificação do padrão de distribuição numérica e a justificação dos motivos porque não falharia, foi feita correctamente e com muita facilidade. A maioria dos grupos, ao resolver este problema, partiu da construção de tabelas, que analisou para apresentar as suas conclusões.

Ficha 25 – Investigando Sequências e Ficha 26 – Investigando Regularidades

Nestas fichas estava em causa reconhecer padrões de distribuição numérica e regularidades.

Como primeiro resultado da observação feita, podemos dizer que todos os grupos conseguiram resolver correctamente todas as perguntas. No caso da sucessão de Fibonacci o facto de os dois primeiros termos serem iguais, levantou inicialmente algumas dificuldades aos alunos. Mas após uma pequena excitação, todos os alunos conseguiram resolver correctamente a pergunta.

A fórmula de recorrência foi implícita e expontaneamente usada por todos os grupos. A partir da resolução da primeira questão, todos os grupos tentavam rapidamente arranjar um processo que permitisse passar de um termo ao seguinte. Mesmo no caso da sucessão dos quadrados perfeitos, em que era mais evidente encontrar a expressão do termo geral, os alunos determinaram os restantes termos por recorrência. A expressão do termo geral, só foi determinada, quando as professoras os questionaram directamente nesse sentido.

A soma de todos os ímpares de 1 a 201 também não ofereceu dificuldades de maior aos alunos. A lei a que tinham chegado anteriormente, implicava que em primeiro lugar determinassem quantos ímpares queriam somar. Os alunos facilmente elaboraram um dos seguintes raciocínios:

> "Do 1 ao 201 há 101 ímpares porque como se começa e acaba num número ímpar há mais ímpares que pares."

> "Se fosse até ao 200 havia 100 ímpares e 100 pares. Como é até ao 201 há mais um ímpar, logo temos que somar 101 ímpares."

A exploração de regularidades (ficha 26) foi uma actividade que muito entusiasmou os alunos. Na primeira questão estava apenas em causa conseguir identificar a regularidade e implementá-la correctamente. Foi com facilidade que os alunos resolveram esta questão e alguns grupos tomaram mesmo a iniciativa de usar a regularidade para os casos que logicamente se seguiriam.

Na segunda questão, a justificação da regularidade não foi imediata para os alunos. Para descobrirem outro par de números que a verificasse, os alunos usaram uma estratégia de tentativa e erro. Mas mesmo após terem resolvido esta parte da pergunta a relação que procuravam ainda não era clara. No entanto, a maioria dos grupos revelou grande persistência na descoberta da relação procurada, analisando várias hipóteses com visível entusiasmo. Continuaram a procurar outros pares de números que verificassem a regularidade e iam afastando hipóteses entretanto avançadas no grupo: "com números pares dá", "dá com números em que os algarismos têm uma diferença de duas unidades". Das diversas tentativas feitas a ideia de se concentrarem na multiplicação foi surgindo (embora em alguns grupos esta ideia tivesese sido "provocada" pelas professoras) e a partir daqui, surgiu com facilidade a relação procurada.

A terceira questão (que não foi resolvida por todos os grupos por falta de tempo) não ofereceu grandes dificuldades. Os grupos que a resolveram, implementaram correctamente uma estratégia de tentativa e erro bem organizada. Assim, para o algarismo das centenas escolheram o 5 e para os algarismos das dezenas fizeram várias experiências com o 4 o 3 e o 2 e registaram os resultados de cada uma. Quando encontraram o maior produto possível, a generalização surgiu com facilidade.

Em conclusão, a descoberta de padrões de distribuição numérica entusiasmou bastante os alunos. Talvez porque a calculadora, ao permitir determinar com muita facilidade os termos de uma dada sucessão por recorrencia, não favoreça a procura do termo geral, o que é facto é que em nenhum caso os alunos o usaram expontaneamente. No entanto, sempre que as professoras os desafiaram a pensar no termo geral, os alunos, após alguma reflexão, apresentaram-no sem grande dificuldade.

Foi também interessante verificar a forma como os alunos, na segunda pergunta da ficha 26, realizaram várias experiências até encontrarem uma justificação da regularidade observada. Também na terceira questão desta ficha, se pôde observar uma grande facilidade em experimentar organizadamente vários valores e em generalizar a conclusão a que chegaram.

A Aula de Resolução de Problemas com Toda a Turma

Como já foi referido anteriormente, houve a certa altura uma alteração no que era pedido que os alunos apresentassem como resolução de um problema por escrito. Assim, impunha-se esclarecer algumas ideias e continuar a realçar a importância de cuidar a forma como se apresentam as resoluções dos problemas por escrito.

Nesta aula, as professoras apresentaram três problemas. O trabalho em relação aos dois primeiros desenrolou-se em duas fases distintas: resolução em grande grupo de cada problema e crítica de possíveis resoluções que as professoras tinham previamente preparado em acetatos (ver anexo 2).

Na primeira fase, foi dado algum tempo aos alunos para pensarem em cada um deles e depois, a sua resolução, foi discutida com toda a turma. Importa realçar alguns aspectos interessantes que se puderam observar. Assim, ao resolverem o primeiro problema, vários alunos reconheceram que ele era idêntico a outro anteriormente resolvido (ao problema do torneio de futebol, ficha 14). O segundo problema, poderia ser facilmente resolvido usando uma estratégia de trabalho do fim para o princípio. Até aqui, nunca se tinha trabalhado esta estratégia, mas vários alunos da turma A, depois de pensarem no problema avançaram com o número de maçãs que deveria ter a Maria antes de encontrar o terceiro amigo. Como um aluno disse:

> "Se no fim ela fica sem maçãs, antes tinha que ter só uma, porque metade de uma mais meia maçã dá uma maçã inteira."

Depois surge com facilidade a forma de continuar a resolver o problema. Na turma B, com alguma ajuda da professora, surgiu a ideia de que deveria ser um número ímpar de maçâs, para que metade mais meia maçã pudesse dar maçãs inteiras. A partir daqui, após algumas tentativas, é encontrada a solução do problema. Depois, a professora salienta como este problema poderia ter sido resolvido partindo do fim para o princípio. Nesta turma, esta foi uma das aulas em que os alunos mais se entusiasmaram a resolver problemas. No final da aula, alguns alunos pediram ajuda à professora para se lembrarem do enunciado de alguns problemas que já conheciam e achavam engraçados e desafiavam os colegas a pensar neles em casa.

Por falta de tempo, foi apenas apresentado o enunciado do terceiro problema e foi pedido aos alunos para o resolverem em casa.

Quando, após a resolução dos dois primeiros problema, as professoras apresentaram os acetatos com várias resoluções, o espírito crítico dos alunos foi grande. Em relação a cada resolução foram analisando se ela era ou não clara, identificando assim, a propósito de cada um destes problemas, a importância de registar as tentativas de resolução que se vão fazendo e de clarificar o modo como as estratégias são implementadas.

Assim, nesta aula, para além de os alunos terem mantido uma discussão viva e entusiasmada a propósito da resolução de cada problema, a análise da importância de apresentar a sua resolução por escrito de uma forma clara, foi bem conseguida. Para as professoras, partir de possíveis resoluções, foi considerada uma boa estratégia para realçar os aspectos pretendidos. Assim, os alunos ao serem confrontados com diferentes resoluções, foram os primeiros a notar o que não era claro em cada uma delas. Foi assim possível inventariar uma série de aspectos a ter em atenção quando se apresenta a resolução de um problema que foram referidos pelos alunos. Para as professoras, isto permitiu que eles "sentissem" a importância de apresentar de uma forma cuidada a resolução de um problema.

Resolução Individual de Problemas

Ao longo da segunda parte do estudo, os alunos resolveram individualmente 4 problemas. Os três primeiros foram apresentados na mesma ficha (ficha A) e os alunos dispuseram de 50 minutos para os resolver. O quarto problema (ficha B) foi apresentado isoladamente e os alunos dispuseram de cerca de 10 minutos para a sua resolução. O trabalho dos alunos foi recolhido e classificado com base numa escala de classificação holística focada (Anexo 3). As resoluções apresentadas pelos alunos foram classificadas em conjunto com as duas professoras usando o seguinte procedimento recomendado por Fernandes (1988) a propósito da utilização desta escala: leitura prévia de todas as resoluções apresentadas pelos alunos, procurando identificar resoluções de referência em que fosse claro o critério utilizado e a respectiva pontuação.

A ficha A foi apresentada aos alunos na segunda semana de Março e a Ficha B na primeira semana de Abril. Os quadros 1 e 2 dizem respeito à distribuição da classificação obtida pelos alunos das duas turmas em cada uma destas fichas.

Analisando as resoluções dos alunos na ficha A, podemos realçar vários aspectos. Em primeiro lugar, como foi referido pelas professoras, aparentemente o facto de nesta ficha, os alunos terem tido três problemas para resolver, originou duas situações diferentes. Assim, bastantes alunos com pontuações de 3 e 4 em dois dos problemas, não fizeram nenhuma tentativa de resolução do terceiro problema. A ideia de que estes alunos não tiveram tempo para trabalhar um dos problemas foi confirmada por alguns comentários que fizeram quando entregaram as resoluções: "não tive tempo de resolver este problema" ou "demorei muito tempo a resolver o primeiro problema e depois fiquei sem tempo para pensar neste". Outros alunos dispersaram-se, não conseguindo apresentar uma resolução completa de nenhum deles.

Quadro 1

Distribuição das Classificações na Resolução

Individual de Problemas - Ficha A

Classificação	Turma A n = 25	Turma B n = 24
1	0	0
2	1	1
3	0	1
4	2	3
5	2	3
6	3	3
7	6	7
8	4	1
9	4	0
10	1	3
11	2	2
12	0	0
	$\bar{x} = 7.2$	$\bar{x} = 6.63$

Nota: pontuação máxima - 12

Quadro 2

Distribuição das Classificações na Resolução Individual de Problemas – Ficha B

Classificação	Turma A n = 25	Turma B n = 22
0	0	0
1	1	2
2	4	4
3	6	8
4	14	8
	$\bar{x} = 3{,}32$	$\bar{x} = 3$

Nota: Pontuação máxima 4

Em segundo lugar, os alunos que tiveram pontuação mais baixas, foram sobretudo pouco persistentes em implementar uma estratégia. Assim, no primeiro problema, todos os alunos (excepto 2) começaram a usar uma estratégia sistemática de tentativa e erro, mas o trabalho que realizaram revelou pouca persistência na implementação dessa estratégia. Também, no segundo problema, muitos destes alunos começaram a construir um esquema, mas parecia que desistiam a partir do momento em que ele se começava a complicar. Finalmente, um número ainda grande de alunos revelou algumas dificuldades em organizar o trabalho de uma forma clara.

Nesta altura, em relação a estes dois últimos aspectos, os alunos já evidenciavam grande facilidade quando apresentavam por escrito resoluções de problemas em grupo. Mas, a análise dos trabalhos individuais, permitiu constactar que quando trabalhavam sózinhos, alguns alunos ainda tinham dificuldades ao nível da implementação das estratégias e da organização do trabalho escrito.

De uma forma geral, as professoras consideraram os resultados obtidos na ficha A bastante positivos. Como uma delas refere:

> "Lendo as resoluções dos alunos sente-se que muitos já conseguem pensar sózinhos numa situação nova. Mesmo os que têm pontuações mais baixas mostram algum trabalho que reflecte uma tentativa de perceber os enunciados dos problemas."

A outra professora acrescenta:

> "Não nos podemos esquecer que apesar dos alunos terem encarado como natural a resolução desta

ficha, a verdade é que resolver problemas sózinho, é muito diferente do que resolver em grupo."

Para as professoras há uma distinção clara a fazer em termos do desempenho na resolução de problemas em grupo e individualmente. Assim, ao nível da resolução de problemas em grupo, os alunos atingiram uma grande maturidade: conseguem resolver sem ajuda das professoras os problemas e começa a ser visível uma análise mais profunda das situações estudadas ao nível da exploração de extensões do problema e da justificação e clareza das respostas que apresentam por escrito. Mas, não é de espantar que tudo isto não se tenha traduzido de igual forma ao nível individual. Assim, quando trabalham em grupo, os alunos podem discutir sugestões que são apresentadas por vários alunos, é natural que se crie um clima de trabalho que leve o grupo a ser persistente na implementação de estratégias e que, uma vez que o trabalho escrito reflecte o esforço de todos, ele seja mais claro e organizado.

Tendo em conta o facto de nesta ficha se ter verificado ou falta de tempo para pensar em todos os problemas ou uma grande dispersão pelo facto de terem de resolver 3 problemas, decidiu-se experimentar a situação de apresentar apenas um problema (ficha B) para os alunos resolverem individualmente. Na turma B esta ficha só foi resolvida por 22 alunos, pois dois alunos desta turma tinham entretanto abandonado a escola.

Analisando a forma como os alunos resolveram este problema podemos destacar vários aspectos. Assim, só 1 aluno da turma A e 2 da B, não conseguiram evidenciar alguma compreensão do problema. Por outro lado, os alunos que obtiveram 2 pontos iniciaram a resolução do problema de uma forma correcta. Ou desenharam árvores de tamanho 20 ou construiram uma tabela conseguindo apresentar uma resposta correcta para esta parte do problema. Mas, ao generalizarem para o tamanho 100, basearam a sua resposta no uso da calculadora e não explicaram a forma como a sua utilização permitiu resolver o problema. Em relação aos restantes alunos verificou-se que na sua maioria, utilizam a fórmula de recorrência. Talvez por a calculadora facilitar este processo, os alunos não sentiram a necessidade de passar para a expressão geral. Registam numa tabela alguns valores intermédios, determinam a solução do problema e generalizam descrevendo um processo baseado na utilização da calculadora.

Também os resultados obtidos nesta ficha, foram considerados bastante positivos pelas professoras. Sobretudo, como referiram, é visível que um maior número de alunos conseguiu implementar correctamente uma estratégia e apresentou um trabalho melhor organizado e justificado.

Em conclusão, embora os alunos tenham evidenciado algumas dificuldades na resolução individual de problemas que já tinham ultrapassado ao nível do trabalho em grupo, os resultados obtidos foram bastante positivos. Nos trabalhos apresentados, a grande maioria dos alunos revelou alguma compreensão dos diferentes problemas. Na ficha A, alguns alunos dispersaram-se pela resolução dos três problemas não conseguindo concluir a resolução de nenhum deles ao passo que outros, apresentaram resoluções completas dos dois primeiros parecendo ter ficado sem tempo de resolver o último. Nesta ficha, alguns alunos ainda revelaram algumas dificuldades ao nível da implementação de estratégias e na organização do trabalho. Na ficha B, há uma clara melhoria em relação a estes aspectos.

A questão de ser ou não preferível, apresentar só um problema para os alunos resolverem individualmente continuou em aberto. Da discussão em torno desta questão, pareceu mais adequado coexistirem estas duas situações. Se se pretender focalizar a avaliação do desempenho dos alunos na resolução individual de um determinado tipo de problema, pareceu preferível apresentar, em diferentes aulas, várias fichas com um problema cada uma. Assim, os alunos podem concentrar toda a sua atenção na resolução daquele problema, não se correndo o risco que se dispersem por vários. Mas apresentar só um problema pode ser frustrante, uma vez que os alunos que tenham dificuldades na resolução daquele problema, vão de certeza obter uma pontuação baixa.

Comentários Gerais

A evolução observada nos alunos em relação à capacidade de resolver problemas prendeu-se com uma série de aspectos. Ao longo deste trabalho, um maior domínio de estratégias de resolução de problemas e uma mudança de atitude que se traduziu numa maior persistência e envolvimento no trabalho evidenciaram-se significativamente na evolução dos alunos.

Estratégias Usadas na Resolução de Problemas. Ao longo do trabalho realizado com os alunos, as estratégias de resolução de problemas não foram objecto de um ensino específico nem foram determinantes na escolha dos problemas. Assim, o trabalho em torno das estratégias de resolução de problemas surgiu naturalmente à medida que os alunos iam resolvendo os problemas e estes eram discutidos, na fase de reflexão geral com toda a turma. No entanto, a evolução dos alunos em relação ao domínio de algumas estratégias foi um dos aspectos em que se observaram grandes mudanças.

a) Tentativa e erro. Quando da resolução dos primeiros problemas, as sugestões das professoras no sentido de experimentarem valores e analisarem os resultados assim obtidos espantou bastante os alunos. A pergunta "Podemos experimentar um número qualquer?" foi feita várias vezes num tom de surpresa. Como refere uma professora:

> "No início, a tentativa e erro era uma ideia completamente nova para os alunos. Percebia-se perfeitamente que para eles, resolver um problema era identificar uma ou várias operações matemáticas que permitissem obter uma solução."

Mas ultapassada esta primeira reacção, a estratégia de tentativa e erro sistemático passou a ser muito usada pelos alunos. Em grande parte porque o facto de disporem de uma calculadora lhes facilitava o uso desta estratégia, mas também porque os conhecimentos matemáticos dos alunos neste nível de escolaridade ainda eram bastante reduzidos.

Ao usar esta estratégia duas questões se levantam: a sua persistência e a realização de ensaios feitos com base na análise dos resultados obtidos nos anteriores.

Desde o momento em que perceberam que esta estratégia era "lícita", os alunos foram bastante persistentes na sua utilização. Testar valores na calculadora, não os parecia cansar. No entanto, a passagem para um processo de tentativa e erro consequente foi mais difícil. Por um lado, como na calculadora não é possível manter um registo das experiências feitas, é preciso um grande cuidado em as anotar no papel. Por outro lado, em alguns dos problemas propostos, o número de tentativas a fazer era relativamente limitado. A conjunção destes dois aspectos parece ter levado a que, mesmo quando as professoras os incentivavam a organizar logicamente as tentativas que iam fazendo, alguns alunos continuassem "agarrados" à calculadora e, por exemplo, afirmassem: "professora, deixe estar que eu assim chego lá".

Mas à medida que aumentava a sua experiência com a resolução de mais problemas e com as análises que as professoras orientavam da sua resolução, os alunos foram progressivamente usando uma estratégia de tentativa e erro mais consequente.

Nos problemas da ficha 15 já a maioria dos alunos da turma A organiza um processo de tentativa e erro que tem em conta os resultados das experiências anteriores. Assim, a partir do resultado de cada ensaio decidem se aumentam ou diminuem o número de respostas certas até obterem o resultado pretendido e têm o cuidado de registar no papel cada experiência feita.

Na ficha 17, já há também muitos alunos que antes de iniciarem uma estratégia de tentativa e erro, delimitam o número de ensaios. Por exemplo, quando se trata de pensar se é possível obter determinadas pontuações com 6 tiros, começam por decidir se é ou não necessário errar no alvo. Se verificam que sim, procuram encontrar 5 combinações que permitam obter a pontuação pretendida mais 75 pontos (que correspondem ao desconto que se tem ao errar o alvo). Se assim não conseguem obter a pontuação que procuravam, partem da pontuação pretendida mais 150 pontos (que corresponde a errar 2 vezes o alvo) e só a partir daqui é que voltam a ensaiar novos valores.

Por outro lado, como referiram as professoras, o uso desta estratégia permitiu que os alunos mais fracos experimentassem algum sucesso na resolução de problemas. Ao nível do trabalho em grupo, sobretudo na turma B, vários grupos com um nível geral de conhecimentos matemáticos bastante baixo, conseguiram resolver correctamente os problemas e entusiasmar-se pelo trabalho que iam realizando. Também ao nível das resoluções individuais foi visível que, sobretudo para alguns alunos mais fracos, embora ainda com dificuldades em implementar esta estratégia de uma forma consequente, ela os ajudou a fazer tentativas de resolver o problema.

De uma forma geral, podemos pois dizer, que se a estratégia de tentativa e erro sistemático foi usada inicialmente de uma forma pouco organizada por bastantes alunos, cada vez mais eles foram passando a só usar esta estratégia depois de delimitarem o número de tentativas a fazer e com o cuidado de que o resultado de cada ensaio influenciasse os ensaios posteriores.

Além disto, como referiram as professoras, a estratégia de tentativa e erro sistemático foi consequentemente usada em situações inesperadas. Ao vincar nos alunos a ideia de "experimentar", foi bastante usada como uma primeira tentativa de resolver ou perceber melhor as questões que lhes eram colocadas. Por exemplo, se não identificavam a justificação para determinada relação, os alunos tomavam a iniciativa de experimentar valores. Esta estratégia também foi bastante usada quando do início do estudo das equações. Assim, percebido o que era a solução de uma equação, quando esta era relativamente simples, muitos alunos encontravam-na por tentativa e erro. Para eles, só equações mais complicadas justificavam o uso de um processo específico de resolução.

b) Reconhecer regularidades. Reconhecer padrões de distribuição numérica a partir de uma dada situação, generalizá-los e encontrar argumentos que garantam que eles se verificam sempre, constituiam os objectivos de algumas das fichas de trabalho (20, 21, 24, 25 e 26). Nas 3 primeiras perguntas da ficha 25 era suficiente a identificação de elementos que verificavam a lei de distribuição, mas nos outros casos tal identificação era o ponto de partida para a resolução de situações problemáticas.

De uma forma geral, todas estas fichas entusiasmaram visivelmente os vários grupos que conseguiram identificar com facilidade os diferentes padrões de distribuição numérica. Só dois grupos da turma B, precisaram de alguma ajuda no problema da ida da Terra à Lua (ficha 20).

Quando estas fichas foram apresentadas aos alunos, já estes se tinham apercebido de que, como a máquina de cálcular não memoriza mais do que um valor, deveriam ter o cuidado de registar na folha de trabalho as relações que iam descobrindo. Assim, ao nível do trabalho em grupo, a resolução destas situações foi sempre correctamente apoiada na construção de uma tabela ou na análise de um desenho. Por exemplo para identificar a lei de distribuição a que obedecia o número de ripas necessárias para a construção das escadas mágicas (ficha 24), os alunos apoiaram-se na construção de uma tabela como a que se mostra na figura 1. A figura 2 ilustra o processo usado por outros grupos, que partiram do desenho de vários tamanhos de escadas para deduzir o padrão de distribuição numérica.

Apoiando-se nas conjecturas que estes processos lhes proporcionavam, utilizaram a calculadora para calcular rapidamente os termos pedidos, usando implícita e espontaneamente a fórmula de recorrência. Mesmo nas situações em que o recurso ao termo geral seria aparentemente mais evidente, como no caso da sucessão dos quadrados perfeitos, o primeiro processo dos alunos foi o de cálculo por recorrência.

Embora o estudo das sucessões não estivesse em causa, pois ele só é feito no ensino secundário a forma como os alunos falavam acerca da utilização da calculadora para determinar os diferentes termos, constituiu uma primeira ideia acerca da distinção entre sucessões que são ou não progressões. Assim, os alunos distinguiam entre a possibilidade de usar a parcela ou o factor constante (progressões aritméticas e geométricas) e os casos em que tal não era possivel (sucessões que não são progressões).

Os alunos só apresentaram a expressão do termo geral nos casos em que tal foi explicitamente pedido pelas professoras. Nessas situações tal não pareceu envolver grande dificuldade para eles. Embora a passagem de um raciocínio por recorrência para um em que se procura uma expressão geral não seja imediata,

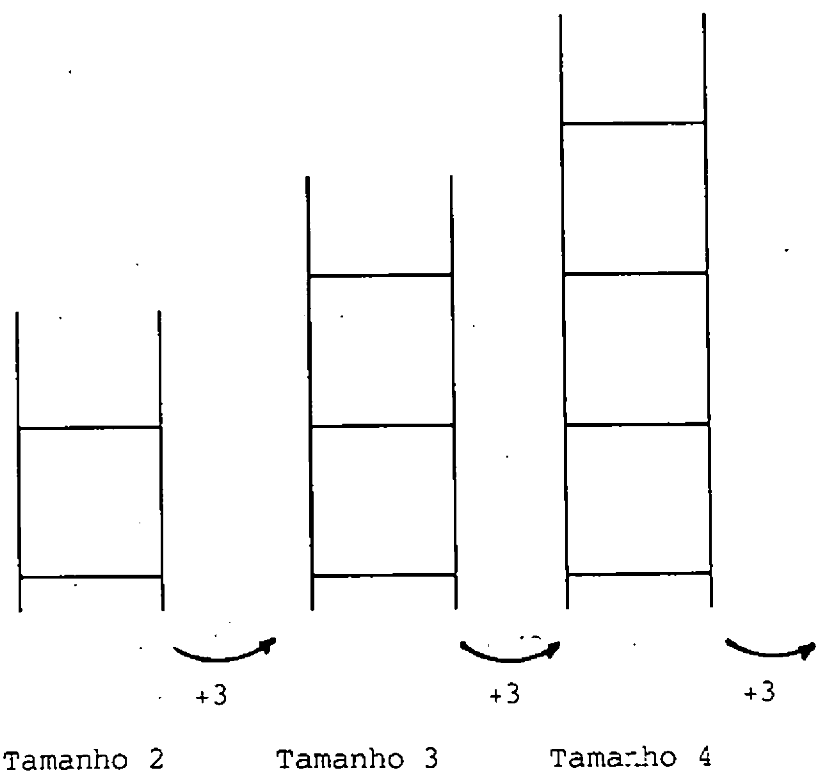
Figura 1

Tabela Usada por Alunos na Resolução da Ficha 24

nº de degraus	nº de ripas
2	8
3	11= 8 + 3
4	14 = 11 + 3
5	17 = 14 + 3

Figura 2

Esquema Usado por Alunos na Resolução da Ficha 24



quando trabalharam em grupo, os alunos manifestaram certa facilidade em perceber as relações que se podiam estabelecer e em testar conjecturas até descobrir a expressão geral dos termos. No entanto, ao nível individual, no problema das árvores de Natal (Ficha B), muitos alunos, mesmo para a árvore de tamanho 100, continuaram a implementar com a calculadora o processo de recorrência que tinham identificado, e a lei a que chegaram implicava o cálculo de todos os termos.

Podemos pois concluir que a resolução de situações de descoberta de padrões de regularidade numérica foi uma actividade com que os alunos se entusiasmaram e em que, ao nível do trabalho em grupo, tiveram grande facilidade. Assim, foi visível a facilidade com que os alunos se apoiavam na construção de tabelas ou de desenhos para chegar ao processo que permitia obter os termos pedidos com o auxílio da calculadora. Nos casos em que a expressão do termo geral foi explicitamente pedida, todos os grupos a identificaram correctamente. Na resolução de um problema deste tipo feita individualmente, a maioria dos alunos não recorre ao termo geral, implementando persistentemente a fórmula de recorrência.

c) Outros aspectos. Embora a utilização da calculadora e a maior parte dos problemas apresentados, favorecessem a utilização das estratégias referidas anteriormente, pontualmente verificaram-se situações que importa salientar.

Vários alunos da turma A, sem que alguma vez se tivesse feito referência ao uso da estratégia de *partir do fim para o princípio*, propuseram que ela fosse utilizada na resolução do problema das maçãs (anexo 2).

Também alguns alunos identificaram problemas com estruturas matemáticas semelhantes. Por exemplo, vários alunos reconheceram que o problema do torneio de ténis (anexo 2) era semelhante na sua estrutura matemática ao problema da ficha 14. Também, o problema da ficha 21 (uma escolha difícil) foi relacionado com o problema da ida da Terra à Lua (ficha 20) e com outros que alguns alunos já conheciam.

Por outro lado, apesar de a maior parte dos problemas, poder ser resolvida por tentativa e erro ou a partir da descoberta de uma regularidade, nas situações em que tal não era possível, os alunos trabalharam sem dificuldades de maior e conseguiram apresentar resoluções completas e bem justificadas.

Envolvimento dos Alunos no Trabalho. Na resolução de um problema um aspecto fundamental é a forma como o aluno se envolve no trabalho. Fazer várias tentativas, reanalisar o problema e organizar o trabalho de uma forma clara, são alguns aspectos que determinam o sucesso na resolução de problemas.

No início do ano a maioria dos alunos, perante um problema, procurava identificar alguma operação que rapidamente permitisse encontrar uma resposta. Como tal não era possível ou pelo menos não era imediato, os alunos desistiam e solicitavam de imediato a ajuda das professoras. Mas ultrapassada esta fase, os alunos foram-se apercebendo progressivamente do que era um problema, da possibilidade da existência de diferentes estratégias para o resolver, e em como era importante pensar nele e fazer sucessivas tentativas para conseguir chegar à solução.

Uma primeira observação permite afirmar que nas duas turmas, os alunos se tornaram cada vez mais independentes e capazes de resolver em grupo, sem qualquer ajuda das professoras, os problemas que lhes eram propostos. Como refere a professora da turma A:

> "A partir de certa altura, enquando os alunos resolviam os problemas em grupo, não tinha nada para fazer na aula. Resumia-me a passar pelos grupos e ver como iam trabalhando, mas ninguém me pedia ajuda."

A professora da turma B considera:

> "Na minha turma houve sempre dois ou três grupos mais fracos que nunca foram totalmente autónomos. Mas mesmo esses, se me chamavam era porque já tinham feito tentativas mas ainda tinham algumas dificuldfades em resolver o problema. Sentia-se que embora não fossem capazes de resolver sem ajuda alguns dos problemas, estavam entusiasmados com o trabalho."

Para esta professora, a crescente autonomia em relação à resolução de problemas prende-se também com outro aspecto:

> "Experimentar e analisar tentativas, fazer um desenho ou contruir uma tabela, são coisas que mesmo os alunos mais fracos sentem que conseguem fazer."

Mas, há ainda outro aspecto que esta professora refere como estando relacionado com o interesse na resolução de problemas. Muitos alunos desta turma tinham uma experiência em relação à Matemática escolar fortemente negativa. Mas as propostas e a organização do trabalho eram muito diferentes do que estavam habituados. Assim, esta "novidade", na qual se incluia a resolução de problemas, embora demorando algum tempo, acabou por entusiasmar alguns alunos.

Também o facto de, a partir de certa altura terem conseguido uma ligação sucesso/persistência foi um aspecto que muito ajudou os alunos mais fracos a ganharem um visível gosto pela resolução de problemas. Comentários como: "a princípio parece difícil mas se a gente tentar compreender até é divertido e acabamos por conseguir resolver" ou "deu luta mas conseguimos resolver", foram feitos por alguns alunos após a resolução de vários problemas. Assim, perante um problema, foi visível que todos os alunos foram assumindo uma atitude de confiança que os levava a persistir no trabalho e a entusiasmarem-se por ele.

Por outro lado, cada vez mais os alunos se ligavam ao problema, procurando perceber o significado do resultado obtido. Por exemplo, no problema da ficha 19 vários grupos não acreditaram na solução encontrada. Depois de verificarem novamente os cálculos, reanalisaram o problema procurando encontrar uma justificação para que a solução obtida fosse tão diferente da que esperavam inicialmente. Como um aluno comentou:

> "Com uma dobragem ficamos com o dobro da espessura que tínhamos antes. O problema tem que se resolver assim! Podemos é ter errado as contas."

Mas depois de verificarem os cálculos, não se dão por satisfeitos:

> "... temos que perceber como é que este resultado pode estar certo"

Assim, os alunos acreditaram na estratégia seguida, mas como a solução encontrada parecia não fazer sentido, voltaram a analisar o problema e os cálculos efectuados. Mesmo assim, só dão por concluído o trabalho depois de perceberem o significado da solução que encontraram. Esta atitude é bem diferente da habitual, em que os alunos se dão por satisfeitos com o resultado obtido não se preocupando em analisar se ele fará sentido.

Por outro lado, alguns alunos, sobretudo da turma A, por iniciativa própria ou por sugestão das professoras, entusiasmaram-se com a análise de alterações ao enunciado. No problema da ficha 21, vários alunos analisaram algumas modificações que poderiam tornar mais vantajosa a hipótese B. Também o problema da ficha 22 entusiasmou os alunos a estudarem alterações ao enunciado. Um grupo verificou, por iniciativa própria, que mesmo que as percentagens de imposto e de desconto fossem diferentes a quantia que se pagava era sempre a mesma. Outros, a quem as professoras desafiaram com a pergunta: "e se as percentagens de desconto e de imposto fossem outras?", fizeram várias experiências com notório entusiasmo. Estes alunos sentiam um visível prazer em analisar mais profundamente os problemas e em discutir questões em torno deles.

Implicações para o Processo de Ensino-Aprendizagem. Como referem as professoras, as actividades em torno dos problemas não se resumiram a desenvolver nos alunos uma maior capacidade de resolução e um maior envolvimento no trababalho. Como foi referido por uma delas:

"Para além de os alunos terem evoluído em relação à resolução de problemas, foi também muito importante a influência que ela teve em todo o processo de ensino- aprendizagem."

Um dos aspectos referidos pelas professoras foi o de a resolução de alguns problemas ter proporcionado um contexto de trabalho que facilitou a exploração e compreensão de conceitos.

Por exemplo, ainda na primeira fase da experiência, os alunos resolveram alguns problemas em que estavam em causa o conceito de múltiplo e divisor de um número (fichas 4 e 6). Os alunos puderam resolver os problemas com o auxílio de esquemas ou por tentativa e erro, e no final do trabalho conseguiram concluir que teria sido mais rápido terem calculado o m.m.c. ou m.d.c, o que muito espantou alguns alunos. Um deles comentou:

"Nunca pensei que o m.m.c. pudesse servir para alguma coisa."

Com estes e outros problemas, os alunos puderam, na medida em que perceberam situações em que os conceitos podiam ser aplicados, aprofundar a sua compreensão.

Também nas fichas 14 e 15 os alunos adicionaram números inteiros sem que tal assunto tivesse sido trabalhado formalmente durante as aulas. A exploração destes problemas permitiu que nas aulas de uma hora, fossem os alunos a chegar às regras de adição dos números relativos. Como refere uma professora:

"Todos os alunos sabiam somar números negativos com positivos e negativos com negativos. Faziam a ligação com as situações dos problemas e calculavam com muita facilidade o valor das expressões numéricas."

Assim, em relação à soma de números relativos, os problemas proporcionaram um contexto de tal modo significativo, que para além de ficar completamente ultrapassada uma apresentação mais formal deste assunto, facilitou aos alunos a sua aprendizagem.

Também no estudo das equações se fez sentir a influência da resolução de problemas. As equações mais simples eram muitas vezes resolvidas por tentativa e erro. Alguns alunos só abandonavam este processo quando se tratava de resolver equações mais complicadas. Por outro lado, a maioria dos alunos, após resolver a equação, tinha o cuidado de fazer a verificação da solução. Também, muitos dos problemas que habitualmente se apresentam neste capítulo foram resolvidos por diferentes processos. Embora isto não seja propriamente de estranhar, a verdade é que o facto de estarem a estudar equações e de disporem de um processo novo para resolver alguns problemas não os levou a uma utilização cega dele. Pelo contrário, os alunos continuaram a analisar o problema e a procurar uma estratégia que lhes parecia mais apropriada para o resolver.

Outro aspecto referido pelas professoras foi o grande progresso dos alunos ao nível do conseguirem, por si sós, pensar nas questões e propor um processo para as resolver. A professora da turma A considera:

> "A partir de certa altura, sempre que tinham uma ficha para resolver, os alunos podiam pensar das mais diferentes maneiras, mas o que é facto é que as resolviam sem qualquer ajuda."

Para esta professora os alunos passaram a trabalhar de uma forma muito diferente da que é habitual enfrentando com confiança e procurando resolver as questões que lhes eram apresentadas.

Para a professora da turma B, embora considerando que alguns dos alunos da sua turma continuaram a ter dificuldades em resolver muitas das questões que lhes surgiam, este prazer em pensar nas questões foi uma grande mudança para a maioria dos seus alunos. Assim, muitos daqueles que no início do ano tinham manifestado uma clara preferência pela resolução de exercícios mais rotineiros passaram a ser os mais entusiastas na resolução de problemas. Aliás, como a professora refere, foi com a resolução de problemas que alguns alunos com um marcado insucesso anterior em Matemática se entusiasmaram pelo trabalho. Apesar de muitos deles continuarem a ter grandes dificuldades, o que é facto é que passaram a participar mais nas aulas e a procurar perceber as questões que lhes eram apresentadas. Como indica, isto é uma grande evolução para alunos, completamente "viciados" em ter negativa a Matemática e em passar as aulas, quanto muito, a copiar o que era escrito no quadro.

Os Alunos Perante a Resolução de Problemas. Com o objectivo de recolher informação sobre a forma como os alunos encararam as actividades desenvolvidas em torno da resolução de problemas foi-lhes colocada a questão "Ao longo deste ano tens resolvido bastantes problemas. Pensas que esta experiência é importante? Porquê?", incluída no questionário apresentado aos alunos (anexo 5).

A análise das respostas obtidas permitiu classificá-las em duas categorias: (a) as que sublinham a resolução de problemas como uma ajuda na compreensão da matéria; (b) as que realçam o papel motivador da resolução de problemas.

Dos 47 alunos das duas turmas, 31 realçaram a relação da resolução de problemas com a compreensão da restante matéria. Para estes alunos esta é uma maneira diferente e melhor de lidar com a Matemática pois percebem com mais facilidade alguns conteúdos e aprendem a pensar nas questões que lhes são apresentadas. Incluídas neste grupo foram obtidas por exemplo as seguintes respostas:

> "A resolução de problemas ajuda-nos a compreender a matéria com grande facilidade. Os problemas que resolvíamos nas aulas de duas horas preparavam-nos para perceber melhor o trabalho que fazíamos nas aulas individuais. Também nos ajudou a resolver problemas que podem aparecer na vida corrente."

> "Esta experiência na resolução de problemas ajudou a perceber as questões da matéria com grande facilidade. Foi uma maneira diferente de aprender a lidar com a Matemática."

> "Temos que pensar bem no problema e arranjar maneiras para o resolver e isso faz com que a gente desenvolva o raciocínio e aprenda a pensar."

> "Não é importante só saber fazer cálculos. Podemos usar a calculadora e temos tempo para pensar. Por isso a resolução de problemas ajuda a saber pensar e isso é importante."

> "Com a resolução de problemas desenvolvemos o raciocínio e os nossos conhecimentos. Ficamos preparados para saber pensar nas coisas novas que nos aparecem."

Para 16 alunos a resolução de problemas é sobretudo motivadora. Como alguns referem:

> "Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar. Temos que pensar bem no problema e podemos experimentar várias maneiras para resolver o prpblema. Isso faz com que a gente se entusiasme pelo trabalho que vai fazendo."

> "Resolver problemas motiva os alunos a trabalhar porque não temos só que fazer contas e podemos pensar em problemas da nosso dia a dia."

> "Apesar de para mim ter sido um bocado difícil fiquei entusiasmada porque tive que pensar em problemas que eram divertidos. Por isso fiquei mais interessada na matéria e gostava de trabalhar nas aulas."

Estes alunos realçaram bem o interesse que esta actividade lhes despertou. A ideia de que a resolução de problemas é interessante e de que proporciona um grande envolvimento com o trabalho, está bem patente nas suas afirmações.

Nas respostas incluídas em qualquer das categorias é visível uma ideia, que a experiência em torno da resolução de problemas parece ter realçado: saber Matemática não é só saber fazer cálculos. Expressões como "não era só preciso saber fazer contas" ou "era muito diferente porque não bastava saber só fazer cálculos", foram incluídas nas respostas dos alunos com bastante frequência. As respostas obtidas e a observação dos alunos, permitiram verificar que esta ideia correspondeu uma profunda mudança ao nível do que os alunos pensavam acerca do que era saber Matemática e que a resolução de problemas foi um aspecto determinante nessa mudança.

Conclusões

Os alunos evoluiram significativamente em relação à capacidade de resolver problemas. Ao nível do trabalho em grupo, revelaram uma grande facilidade em perceber e trabalhar o problema, implementando correctamente estratégias adequadas e organizando de uma forma clara o trabalho escrito. Ao nível do trabalho individual, embora nem todos os alunos tenham conseguido resolver correctamente os problemas apresentados, todos evidenciaram um esforço no sentido de procurar resolvê-los, e já foi significativo o número de alunos que conseguiram usar correctamente uma estratégia e apresentar um trabalho bem organizado.

Em relação à utilização da estratégia de tentativa e erro sistemático houve uma clara evolução no sentido organizar ensaios com base na análise dos resultados obtidos nos anteriores e em registar por escrito o resultado de cada um deles. Também nos problemas de descoberta de padrões de regularidade numérica foi com visível facilidade que os alunos, a partir da análise de desenhos ou tabelas, se apoiavam na utilização da calculadora e implementavam a fórmula de recorrência que tinham identificado. A expressão do termo geral só foi apresentada quando explicitamente pedida.

A ideia de elaborar um ensaio escrito que apresentasse de uma forma organizada os aspectos fundamentais que levaram à resolução do problema foi difícil para os alunos. Assim, foi bem mais fácil, registar todo o trabalho que realizavam à medida que iam resolvendo o problema.

Pôde-se observar uma crescente persistência e entusiasmo em relação à resolução de problemas. Os alunos passaram a confiar nas suas capacidades, não desistiam perante as primeiras tentativas frustradas e cada vez mais se preocupavam em analisar a solução obtida e perceber o seu significado.

A actividade de resolução de problemas teve algumas implicações importantes em todo o processo de ensino-aprendizagem. Como as professoras referiram, alguns problemas ao contextualizaram a exploração de alguns conceitos, facilitaram a sua compreensão. Por outro lado, perante qualquer situação, os alunos mostravam-se mais capazes de pensar nela e de propôr diferentes processos para a sua resolução.

Os alunos consideraram que a experiência em torno da resolução de problemas foi importante. Para a maioria deles, os problemas ajudaram a saber pensar e portanto facilitaram a compreensão dos vários conteúdos trabalhados. Para os restantes alunos, a resolução de problemas é sobretudo motivadora, uma vez que os leva a entusiasmarem-se pelo trabalho e pela análise de situações mais relacionadas com a vida de todos os dias.

Formulação de Problemas

A formulação de novos problemas pelos alunos teve lugar a partir de actividades que eram apresentadas na aula, sob a forma de fichas de trabalho. Nestas fichas, uma das tarefas propostas era a formulação de um problema baseado na situação problemática que tinha sido estudada. As formulações eram entregues às professoras que as devolviam depois de analisadas.

Ao longo de todas as actividades de formulação de problemas em grupo, foi feito o registo magnético das discussões ocorridas durante a realização deste trabalho num grupo de cada turma. Por uma questão de comodidade, estes grupos serão identificados como os grupos de referência. Nesta sessão descreve-se e analisa-se a evolução dos alunos em relação à formulação de problemas.

Primeira Actividade

A primeira actividade de formulação de problemas surgiu na ficha 15. A reacção inicial da maioria dos alunos foi solicitar imediatamente a professora por não entenderem o que se pedia para fazerem. As professoras optaram então por explicar para toda a turma a ideia geral do que se pretendia: na situação que tinham estudado tinham-se-lhes, colocado alguns problemas e agora deveriam ser eles a inventar um problema diferente e a resolverem-no. Após esta explicação, os alunos entusiasmaram-se visivelmente por, como diziam, "terem de ser eles a fazer perguntas".

Na turma B, o grupo de referência seguiu o seguinte processo. Primeiro decidiu a quantas perguntas respondeu a Mafalda e depois quantas acertou. A partir daqui, calculou a pontuação que a Mafalda tinha obtido, e partindo do resultado obtido para formular o seguinte problema:

"A Mafalda respondeu a 7 perguntas e obteve 19 pontos. Quantas perguntas acertou e quantas errou?"

No grupo de referência da turma A, um aluno sugere que se decida primeiro que pontuação querem que a Mafalda tenha e depois formulem o enunciado. Mas os outros alunos não concordam, porque, como um deles afirmou: "assim temos de andar atrás do resultado e pode ser que nem se possa ter a pontuação que nós decidimos." Consideram então que é melhor começar por ver pontuações que seja possível obter. Para tal, seguem um raciocínio idêntico ao do outro grupo, decidindo a quantas perguntas respondeu, e quantas acertou e errou, calculando assim uma pontuação a partir da qual formulam o problema. Este grupo calculou, no entanto, várias pontuações possíveis, tendo mesmo encontrado uma situação em que a pontuação dava negativa. Este facto, que muito os espantou, levou-os a tentar encontrar outras situações em que se obtivessem pontos negativos. Um aluno do grupo disse logo:

"Se errar todas as perguntas a que responde dá sempre pontos negativos."

Ao que outro aluno respondeu:

"Não é preciso errar todas. Se acertar 2 perguntas e errar 7 também dá pontos negativos."

Concluindo outro aluno:

"Desconta-se por cada pergunta errada para não se responder ao calhas. É melhor só se responder às perguntas que se tem quase a certeza de estarem certas."

Como já tinham determinado várias pontuações possíveis, decidem escolher uma em que a Mafalda não tenha "uma nota muito baixa" apresentando a seguinte formulação:

"A Mafalda respondeu a 9 questões e obteve 56 pontos. Quantas questões acertou?"

Em nenhum dos grupos o problema formulado colocou uma situação diferente das que tinham sido apresentadas na ficha. No entanto, neste último grupo, o processo de procura de um problema levou-os a uma exploração mais completa da situação estudada e a trabalharem com facilidade aspectos matemáticos ainda não analisados nas aulas. Assim, perceberam que com um este tipo de teste há algumas pontuações que são impossíveis de obter, encontraram situações de pontuações negativas (que envolviam a soma de dois números negativos ou de um número negativo com um positivo) e compreenderam a lógica da pontuação de um teste deste tipo.

No entanto, no processo de formulação de um problema, os outros grupos não vão além do cálculo de um valor (que é sempre positivo) a partir do qual formulam um enunciados que pode ser considerado como um problema do tipo do da ficha de trabalho. Houve mesmo dois grupos da turma B que apresentaram questões que dificilmente passariam de simples exercícios, sendo um deles um texto em que não se distingue a pergunta da resposta:

"A Mafalda neste teste acertou 7 perguntas e errou 3. Qual foi o resultado que teve?"

"A Mafalda fez 8 questões acertou 5 e errou 3. Assim, com as 5 questões fez 50 pontos, mas como errou 3 questões desconta 21 pontos."

Globalmente os alunos manifestaram interesse e entusiasmo pelo trabalho. Como refere uma das professooras:

"Acho que esta actividade foi muito bem aceite. Embora no início tenha havido alguma desorganização porque não percebiam o que deviam fazer, acabou por ser uma actividade que penso que os alunos gostaram de fazer."

Na aula em que as professoras entregaram as formulações apresentadas pelos alunos, estas foram discutidas com toda a turma. Nesta discussão, que ocupou uma aula de uma hora, e partindo do trabalho apresentado pelos alunos, as professoras procuraram clarificar a diferença entre um exercício e um problema e pensar em problemas que incidissem em aspectos diferentes dos que tinham sido apresentados pelos alunos. Assim, tendo como contexto a situação do teste de resposta múltipla foi apresentada a seguinte situação:

"A Ana e o André também resolveram este teste. A Ana afirma que teve 65 pontos mas o André, depois de pensar um bocado, diz que ela está a mentir. Será que o André tem razão?"

A discussão desta situação levou à análise das seguintes questões:

- qual a pontuação máxima e qual a pontuação mínima que seria possível obter;

- se seria possível obter qualquer pontuação situada entre os dois valores anteriores;

- como se poderia justificar o facto de ser impossível obter, por exemplo, 65 pontos;

- se o número de perguntas fosse diferente já seria possível obter, por exemplo, esta pontuação;

- se será possível que neste teste dois alunos tenham a mesma pontuação, respondendo a um número diferente de perguntas.

Na turma A, nesta reflexão, os alunos começaram por procurar uma situação em que fosse possível obter 65 pontos. Muitos deles avançaram várias hipóteses que eram de imediato criticadas por outros alunos, e como só conseguiam obter esta pontuação com mais que 10 perguntas, começaram a manifestar a opinião de que era impossível obter 65 pontos. Perante esta atitude a professora pediu que eles determinassem a pontuação máxima e mínima que se poderia obter nesta situação. Os alunos avançaram rapidamente os valores 100 e -70, pelo que a professora, partindo desta conclusão, alargou a questão inicial propondo que pensassem num processo que permitisse ter a certeza de que pontuações é possível obter. Este desafio, a que os alunos corresponderam com entusiasmo, levou a um levantamento, que foi feito pelos alunos, das diferentes situações possíveis: se responde a 10 perguntas pode errar 0, 1, ..., 10; se responde a 9 pode errar 0, 1, ..., 9; e assim sucessivamente. Mas, ao perceberem que havia muitas hipóteses diferentes, começaram a desanimar, dizendo que assim nunca mais acabavam. A professora sugeriu então que tentassem organizar estas hipóteses com o auxílio de um quadro que resuma todos os casos possíveis.

Dialogando com os alunos vai registando o número de perguntas que se podem acertar e errar e a correspondente pontuação preenchendo assim algumas entradas do quadro 3.

A partir deste momento, os alunos calcularam algumas pontuações, mas perceberam rapidamente que a segunda coluna do quadro das pontuações se obtinha, tirando dez pontos a cada termo da primeira coluna das pontuações, e assim sucessivamente. Daqui concluiram que o André tinha razão pois é impossível obter 65 pontos e que agora, desde que preencham os quadros, podem ter a certeza de todas as pontuações que se podem obter com este teste. A professora optou por preencher, com a participação dos alunos, apenas algumas entradas do quadro 3, até os alunos identificaren a regularidade que surgia nas colunas da pontuação. Procurou então que os alunos decidissem da possibilidade ou não de obter outras pontuações e que justificassem as suas respostas com base na regularidade que tinham identificado.

Nesta turma, esta discussão foi bastante viva e participada. Os alunos avançavam soluções, faziam novas experiências e contrapunham argumentos a resultados avançados por outros colegas. O facto de terem de adicionar números inteiros positivos e negativos (assunto ainda não estudado) não lhes causou qualquer problema.

Na turma B, a participação dos alunos em torno da análise desta situação problemática foi muito mais reduzida. A questão de ser ou não possível obter 65 pontos ainda entusiasmou alguns alunos, mas como não conseguiram encontrar uma situação que desse esta pontuação, começaram a não intervir. Esta aula acabou

A Resolução de Problemas na Aula de Matemática
Uma Experiência no 7º Ano de Escolaridade

Tese apresentada para obtenção do grau de
Mestre em Educação

Joana Porfírio

Errata

pág. 124, linha 12, onde se lê "hipótese A" deve ler-se "hipótese B".

pág. 125, linha 14, onde se lê "hipótese A" deve ler-se "hipótese B".

pág. 154, linha 15, onde se lê "ficha 19" deve ler-se "ficha 20".

pág. 171, linha 5, deve riscar-se "outro um texto".

pág. 203, linha 2, onde se lê "hipótese A" deve ler-se "hipótese B".

pág. 207, linha 25, onde se lê "terceira" deve ler-se "segunda".

Anexo 1, ficha 14, a continuação desta ficha está nas costas da ficha 15.

Apresento ao Júri as minhas desculpas por outros lapsos, aqui não assinalados, que creio não afectarem de um modo geral a compreensão do texto.

Quadro 3

Pontuações Possíveis no Teste da Ficha 15

A C E R T O U

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
90	80	70	60	50	40	30	20	10	0
80	70	60	50	40	30	20	10	0	
70	60	50	40	30	20	10	0		
60	50	40	30	20	10	0			
50	40	30	20	10	0				
40	30	20	10	0					
30	20	10	0						
20	10	0							
10	0								
0									

E R R O U

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7	-7
-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	-14	
-21	-21	-21	-21	-21	-21	-21	-21		
-28	-28	-28	-28	-28	-28	-28			
-35	-35	-35	-35	-35	-35				
-42	-42	-42	-42	-42					
-49	-49	-49	-49						
-56	-56	-56							
-63	-63								
-70									

P O N T U A Ç Ã O

10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
100	90	80	70	60	50	40	30	20	10
83	73	63	53	43	33	23	13	3	-7
66	56	46	36	26	16	6	-4	-14	
49	39	29	19	9	-1	-11	-21		
32	22	12	2	-8	-18	-28			
15	5	-5	-15	-25	-35				
-2	-12	-22	-32	-42					
-19	-29	-39	-49						
-36	-46	-56							
-53	-63								
-70									

mesmo por se transformar numa exposição feita pela professora, de problemas que se poderiam inventar a propósito da situação problemática apresentada. No entanto, quando directamente questionados, os alunos respondiam correctamente dando a ideia de que estavam a acompanhar o trabalho feito pela professora. Foi o que aconteceu, por exemplo, quando a professora propôs o preenchimento do quadro-resumo de todas as pontuações que se poderiam obter (quadro 3): os alunos que eram directamente solicitados avançavam resultados correctos, mas não tomavam esta iniciativa por si próprios. Nesta turma a professora ilustrou uma série de questões que se poderiam colocar, e possíveis caminhos para as resolver. A maioria dos alunos foi acompanhando as ideias sugeridas pela professora, mas não se envolveu activamente na situação que estava a ser estudada.

Analisando a forma como decorreu esta aula, as professoras afirmaram:

> "Começaram aqui a perceber melhor a diferença entre um problema e um exercício."

> "No final desta aula penso que os alunos sentiram que tinham feito problemas iguais aos das fichas e que não tinham tido grande imaginação... só nesta altura é que eles perceberam que havia outros problemas diferentes que poderiam ter inventado."

As professoras consideraram ainda que "representar" vários caminhos que possam levar à formulação de problemas e à análise de estratégias para os resolver pode ser um contributo importante para desenvolver nos alunos o gosto por colocarem questões mais originais e explorarem vários aspectos que elas possam levantar.

Em conclusão, nesta primeira actividade de formulação de um problema, a surpresa de serem colocados numa situação de fazerem perguntas, entusiasmou a maioria dos alunos. Dois grupos formularam um exercício sendo um deles um enunciado em que pergunta e resposta se confundem e outro um texto em que não se levantava qualquer questão. Todos os restantes grupos apresentaram um problema idêntico aos da ficha de trabalho. É importante clarificar que a distinção que aqui se estabelece entre exercício e problema é feita do ponto de vista dos alunos. Assim, quando um determinado enunciado é considerado um problema, isto significa que em princípio os alunos não dispunham de um método imediato que o permitisse resolver.

No processo de procura de um enunciado que pudessem apresentar, a grande maioria dos alunos contentou-se em colocar uma possível questão, não procurando analisar situações que poderiam levar a problemas diferentes. Isto não é propriamente de estranhar, pois além de se tratar de uma primeira actividade de formulação, o enunciado sugeria bastante a procura de uma pontuação que a Mafalda pudesse de facto ter obtido neste teste.

Na turma A, na aula dedicada a uma exploração mais alargada desta situação problemática, foi bem visível o entusiasmo dos alunos em discutir as várias ideias e em justificar e criticar os argumentos que iam surgindo. Na turma B, pelo contrário, os alunos não se empenharam tanto numa análise mais profunda da situação estudada. Participaram na discussão enquanto ela se manteve ao nível de não exigir a procura de argumentos e justificações um pouco mais elaboradas.

Segunda Actividade

A segunda actividade de formulação de problemas surgiu a propósito da ficha 17.

Na turma B, o grupo de referência, perante esta nova proposta para inventarem um problema, reage como se tratasse de uma tarefa muito difícil. Como uma aluna do grupo afirma:

> "Inventar um problema é o mais difícil. Para mim resolver é muito mais fácil."

Começam por analisar o seguinte enunciado, que é proposto por um dos elementos do grupo:

> "O André não acertou em três tiros, mas ainda tem mais três tiros. Quantos pontos obteve?"

Com base neste enunciado, e usando sempre a calculadora, fazem várias experiências de resolução do problema e encontram várias respostas possíveis. Consideram que como há muitas soluções para o problema, deveriam perguntar entre que valores se pode situar o resultado do André, mas como consideram que assim estão a formular um problema igual ao da ficha abandonam este enunciado.

Outra aluna propõe:

> "O André acertou 2 vezes no 100 e não acertou 4 vezes no alvo. Quantos pontos obteve?"

Mas este enunciado é logo criticado pelos restantes elementos do grupo visto "ser muito fácil". Uma aluna faz notar que não se trata sequer de um problema.

Depois de várias tentativas de formular problemas diferentes, como os vários enunciados que vão propondo são sempre semelhantes a alguma das questões já apresentadas na ficha (o que muito as desanima), resolvem analisar o seguinte enunciado, apresentado por outra aluna do grupo:

> "O André tem 7 setas para atirar e obteve 460 pontos. Quantos pontos poderá ter obtido em cada tiro?"

O grupo começa então a procurar respostas possíveis para este problema, mas como esta formulação surge já em cima do final da aula, a partir do momento em que encontram uma solução para este problema, passam o enunciado e a solução encontrada. No entanto, vários alunos reparam que deveriam continuar a experimentar outros valores para verem se conseguiam obter 460 pontos de maneiras diferentes, apercebendo-se portanto que este problema poderá ter várias soluções.

Na turma A, o grupo de referência, também pensa em vários problemas mas começa a desanimar quando percebe que são enunciados do tipo dos da ficha de trabalho. Vão fazendo uma espécie de inventário das situações que já foram analisadas e concluem que na ficha já se perguntou com que número de setas se pode obter uma determinada pontuação mas dizendo que se tinha acertado sempre no alvo. Decidem então averiguar as soluções que poderá ter a seguinte pergunta:

> "Com que número de setas se consegue obter 195 pontos?"

O facto de perceberem que deve haver várias possibilidades entusiasma-os. Cada aluno do grupo começa então a procurar, com a ajuda da calculadora, soluções para esta questão. Numa primeira fase registam várias possibilidades para, com um número diferente de setas, obter 195 pontos, e em cada número de tiros, diferentes maneiras de obter essa pontuação. É uma fase de muitas experiências em que os alunos se envolvem activamente no trabalho. Começam a perceber que uma solução com 5 tiros pode ser adaptada para um número diferente de tiros. Como um aluno afirma:

> "Posso obter 195 pontos com 5 tiros: 100, 100, 60, 10, -75. Mas se acertar 10 vezes no 10 dá 100. Então ... 10 mais 4 dá 14 tiros."

Em grupo, e partindo desta ideia começam a decompor a solução 100, 100, 60. 10, -75 em várias possibilidades diferentes, analisando várias formas de obter cada valor. Por exemplo, como 100 = 4x10 + 60, também se pode obter 195 pontos com 9 tiros.

Consideram então, que assim há muitas hipóteses a analisar e que será melhor introduzir no enunciado um limite para o número de setas. Formulam então o seguinte problema:

> "O Francisco obteve 195 pontos neste jogo. Sabendo que dispõe no máximo de 10 setas, quantas setas poderá ter usado e de que maneira acertaram no alvo?"

Este grupo, a propósito da formulação de um problema, teve o cuidado de registar no papel as experiências que ia fazendo, procurando tirar conclusões. Na análise geral, feita com as professoras, de como decorreu esta actividade de formulação, vários aspectos foram salientados. Assim, os alunos discutiam algumas propostas que os elementos dos grupos iam apresentando, afastavam algumas delas por não fazerem sentido ou por serem problemas do tipo dos que já tinham sido propostos na ficha de trabalho e tentavam encontrar situações cuja resolução envolvesse aspectos ainda não explorados. Apesar desta atitude se ter sentido mais na turma A, podemos afirmar que nas duas turmas a maioria dos grupos formulou vários problemas diferentes a propósito da mesma situação e só apresentou o trabalho que tinha realizado, depois de ter discutido várias hipóteses e feito várias experiências. A calculadora foi bastante usada para propor e analisar diferentes enunciados. Esta segunda actividade de formulação de problemas demorou bastante tempo, o que levou alguns grupos a acabarem por apresentar um enunciado não por estarem satisfeitos com ele, mas por não terem mais tempo na aula para continuar a discutir, ou por já terem realizado várias experiências mas não terem encontrado um problema mais original.

A tentativa de formular problemas que não fossem iguais aos apresentados na ficha, levou alguns grupos a inventarem uma história a propósito da qual formulavam um problema. Na discussão em grupo, enquanto inventavam a história, todos os alunos se mostravam visivelmente entusiasmados. Mas as formulações apresentadas que resultaram massudas e confusas, eram do tipo das da ficha de trabalho só que integradas num contexto diferente. Este foi o caso do seguinte problema apresentado por um grupo:

> "A Adérita foi à feira popular e viu uma barraca que se chamava OU TUDO OU NADA. Entre alguns jogos que tinha havia um que lhe chamou a atenção. Cada seta custava 75$00 e ela tinha 450$00 que dava para 6 setas. O sr. Arlindo, que era o dono da barraca, disse-lhe as regras do jogo: se ela acertasse no alvo tinha os pontos que lá estavam marcados e se ela errasse descontava 75 pontos. Sabendo que duas setas marcavam 10 pontos cada uma e a Adérita teve 230 pontos, que valores marcavam as restantes setas?"

Analisando a forma como decorreu esta actividade uma professora refere:

> "Os alunos já não acharam tão fácil. Para eles já não foi aquela actividade "simpática" que tinha sido a primeira formulação. Começaram a tentar inventar problemas diferentes e alguns grupos já fizeram um trabalho mais elaborado."

De uma forma geral, antes de formularem um problema, os alunos discutiram aspectos que na primeira actividade não eram sequer referidos nas discussões de grupo: é ou não um problema, é diferente dos problemas da ficha, tem mais de uma solução, que alterações se podem introduzir no enunciado para que não haja demasiadas soluções. Mas ainda lhes falta um poder de análise da situação estudada que os possa levar a pegar numa ideia e aprofundá-la até conseguirem formular um problema que levante questões ainda não exploradas.

Assim, nesta segunda actividade de formulação de problemas os alunos preocuparam-se bastante em formular problemas que pudessem ser diferentes dos da ficha de trabalho o que os levou a uma análise bastante exaustiva de problemas que poderiam ser apresentados. No entanto, esta análise levou a dois tipos de situação:

- alguns grupos inventaram histórias muito compridas, sendo visível o prazer que sentiam à medida que iam criando uma situação que consideravam diferente da apresentada na ficha. Os enunciados, que eram longos e pouco claros, contavam uma história acerca da qual era colocada uma questão do tipo das da ficha.

- os restantes grupos analisaram possíveis enunciados que iam sendo apresentados pelos elementos do grupo. Esta análise, que regra geral era bastante demorada pois nunca mais chegavam a um problema com que estivessem de acordo todos os elementos do grupo, levou mesmo alguns alunos a mostrarem um certo desânimo.

Nesta actividade de formulação, os problemas apresentados não diferiram muito nas duas turmas. Assim, só duas das formulações apresentadas eram enunciados de problemas diferentes. Mas todos os alunos da turma A, nas respostas que apresentaram tiveram o cuidado de, quando propunham um problema com mais do que uma solução, apresentarem as diferentes soluções. Também, como é referido pela professora, os grupos manifestaram um grande poder de autonomia, realizando todo o trabalho sem solicitar directamente o seu apoio. O entusiasmo dos alunos pelo trabalho manteve-se vivo sem que fosse necessária a intervenção da professora. Na turma B, pelo contrário, só foi apresentada uma das soluções de problemas com mais do que uma solução, e os esclarecimentos da professora ainda foram fundamentais para ajudar os grupos a prosseguir o trabalho e a manter vivo o interesse dos alunos.

De uma forma geral, a utilização da calculadora facilitou a realização e análise de várias experiências.

Terceira Actividade

Esta actividade de formulação de problemas decorreu a partir da resolução da ficha 19. Não se podendo fazer contas com papel e lápis, como iriam reagir os alunos a inventar uma situação que envolvesse a análise de três expressões numéricas e em que a determinação do resultado só implicasse usar a calculadora uma vez?

Antes de formularem o problema os alunos jogaram este jogo dois a dois com base em "jogadas" previamente elaboradas. Portanto, para a realização desta tarefa, só puderam contar com as conclusões que foram tirando ao longo do tempo em que foram jogando. As "jogadas" que lhes foram propostas, não faziam parte da ficha de trabalho, uma vez que foram apresentadas em pequenos cartões que foram recolhidos pelas professoras. Por outro lado, este ano, as propriedades da adição e da multiplicação ainda não tinham sido explicitamente tratadas.

Esta actividade de formulação de problemas foi resolvida individualmente e as formulações apresentadas foram classificadas em dois grandes grupos. Num dos grupos foram incluídos todos os enunciados que apesar de serem plausíveis, não colocavam uma questão que fosse realmente desafiadora. Assim, de uma forma geral, os conhecimentos matemáticos que estavam em jogo, envolviam apenas saber que somar poucos números é possível fazer de cabeça e que a multiplicação ou divisão já podem exigir o cálculo com papel e lápis, ou como neste caso, o uso da calculadora.

Por exemplo, foram incluídos neste grupo, formulações como a seguinte:

" Jogada:

a) 325x37 - (101+1537)
b) -20 +10 - 7
c) 42 - 20 +1

Para jogar este jogo deveria usar a calculadora na primeira expressão, uma vez que nas outras se pode fazer as contas de cabeça porque é só somar e subtrair números pequenos."

As formulações incluídas neste grupo, apesar de terem em conta as condições previamente impostas, não colocam questões cuja análise seja desafiadora. Desde que se tenha um domínio mínimo de técnicas de cálculo, facilmente se calcula o valor numérico de duas delas, não havendo portanto dúvidas quanto à expressão em que se deve usar a calculadora. Nestas formulações, os alunos quase que exclusivamente usaram números inteiros bastante pequenos reservando o uso de números com mais do que 2 dígitos para a expressão em que se devia usar a calculadora.

Noutro grupo foram colocados os enunciados que para além de serem plausíveis, implicavam uma análise mais completa de propriedades e relações matemáticas. É o caso da seguinte formulação apresentada por um aluno:

"Jogada:

a) -102 + 2(30 +21) + (32 + 3,3):35,3
b) 1538 x (32,4 + 24,6) - 23(25,2 - 0,4) x 12

c) 57 X 1538 - 12(25,2 -0,4)X23

A expressão da alínea a) pode ser resolvida de cabeça porque a soma de números simétricos dá 0 e porque um número a dividir por ele próprio dá 1. Depois bastava usar a calculadora para a expressão b ou c porque elas dão o mesmo valor porque na multiplicação posso alterar a ordem dos termos e 32,4 + 24,6 = 57."

As formulações incluídas neste grupo colocam situações que não são de resolução imediata. Assim, é necessário analisar primeiro as três expressões, perceber eventuais relações em cada uma delas e entre elas, para decidir em que expressão se deve usar a calculadora e saber determinar o valor das outras duas. Nestas formulações predomina a escolha de números inteiros com dois ou mais dígitos e de números decimais.

Este agrupamento conduziu aos seguintes resultados em cada uma das turmas:

	Turma A	Turma B
Grupo I	7	11
Grupo II	18	10

Apesar de se ter tratado de uma formulação de um problema feita individualmente, e de portanto não ter sido possível fazer uma observação mais focalizada, nas duas turmas o trabalho decorreu sem que os alunos manifestassem grandes hesitações ou dificuldades. Assim, perante esta actividade, cada aluno calmamente reflectiu sobre ela e realizou o trabalho sem solicitar esclarecimentos às professoras.

Em conclusão, de uma forma geral começa a sentir-se uma reacção mais equilibrada à formulação de problemas: nem procuram rapidamente uma questão que possam colocar sem se preocuparem com a pertinência e originalidade dela, nem mostram tantas hesitações perante o trabalho que têm de realizar. Assim, formular um problema começa a ser uma ideia que a maioria dos alunos começa a entender, apesar de muitos deles ainda não conseguirem inventar situações desafiadoras e que envolvam conhecimentos matemáticos um pouco mais elaborados. Comparando as duas turmas, podemos dizer que a maioria dos alunos da turma B tem ainda bastantes dificuldades em se situar numa análise um pouco mais profunda deste tipo de tarefas e que as questões que colocam, apesar de serem plausíveis, não levantam questões cuja análise seja de facto desafiadora. Na turma A é já significativo o número de alunos que formula questões cuja resolução não é imediata.

Quarta Actividade

Esta actividade surgiu na ficha 21. Inicialmente a maioria dos alunos dispunha-se a alterar as hipóteses de escolha de mesada que eram colocadas à Marta. Mas quando perceberam que as deveriam manter, ficaram um pouco perplexos sem saber bem o que deveriam fazer. A ideia de que nem sempre poderia ser mais vantajosa a hipótese que permitia ganhar mais dinheiro no final do ano, começou então a surgir em alguns grupos. Como afirmava uma aluna:

"Ela podia precisar de ter mais dinheiro antes do final do ano."

Esta ideia, que ao fim ao cabo corresponde a perceber que a escolha entre um crescimento aritmético e um geométrico pode depender do número de termos que se considere, era a ideia-chave que estava por detrás desta actividade.

Na turma A, em todos os grupos, após algumas hesitações iniciais, os alunos conseguiram percebê-la e avançar para a formulação do problema sem a ajuda da professora. Na turma B, pelo contrário, a professora teve de ajudar alguns grupos que não percebiam como poderiam colocar uma questão diferente a propósito destas duas hipóteses de escolha de mesada.

Na turma B, o grupo de referência, que foi dos poucos desta turma que não ficou parado à espera da ajuda da professora, começou por analisar as diferenças entre as duas hipóteses de mesada. Dizia uma aluna:

"Nos primeiros meses ela ganha muito mais com a hipótese B, mas a A começa a ser melhor no final do ano."

Acrescenta outra aluna:

"Se ela precisar de dinheiro mais cedo é melhor a hipótese B."

Vão então ver quanto é que se ganha com cada hipótese de mesada no final dos quatro primeiros meses. Decidem então que se a Marta precisar de 2000$00 em Abril terá que escolher a hipótese B. Mas uma aluna repara que se puserem o mês de Abril o problema é muito fácil. Como ela refere:

"Em Abril a hipótese A só dá 40$00, por isso é preciso pensar pouco para resolver o problema."

Calculam então quanto é que ela ganharia em cada hipótese até Julho e verificam que podem afirmar que a Marta queria comprar o relógio neste mês, formulando o seguinte problema:

"Sabendo que a Marta queria comprar um relógio em Julho que custava 2000$00, qual era a hipótese que escolhia, a A ou a B?"

É interessante notar que este grupo, apesar de ter tido a preocupação de não levantar uma questão demasiado evidente, não leva esta ideia até ao limite. Assim, não procura averiguar o primeiro mês em que também era possível ter 2000$00 com a hipótese A e partir daqui para levantar uma questão, que seguindo o raciocínio que elaboraram, poderia ainda levantar mais dúvidas em relação à resposta correcta.

Os problemas apresentados pelos restantes grupos desta turma, basearam-se também em inventar uma situação que implicasse uma escolha, antes do final do ano, entre as duas hipóteses de mesada. No entanto, em quatro grupos, a escolha é feita em Março ou em Abril, meses em que com hipótese A a Marta receberia muito menos dinheiro do que com a hipótese B, e em que uma análise superficial da situação problemática permitia determinar a resposta correcta.

Na turma A, o grupo de referência, percebeu rapidamente que deveria inventar alguma situação em que a Marta precisasse de dinheiro para gastar em determinada coisa antes do final do ano. Assim, supõe que ela precisava de 5000$00 para pagar uma prestação de um computador, mas começam logo a pensar em não colocar uma questão demasiado fácil. Como referiu um aluno:

> "Temos que procurar um mês mais do final do ano senão é muito fácil."

Verificam então que em Outubro já é possivel obter 5000$00 com as duas hipóteses e formulam o seguinte problema:

> "A Marta precisava de 5000$00 no mês de Setembro para pagar a última prestação do seu computador. Qual das hipóteses de mesada terá que escolher?"

Nesta turma, todos os grupos, apesar de apresentarem um problema do mesmo tipo, têm o cuidado de colocar a escolha nos últimos meses do ano, aonde de facto poderá haver dúvidas sobre que hipótese escolher.

Nesta turma, de uma forma geral, foi visível o prazer que os alunos sentiram em tentar que o problema não fosse de resolução imediata. Como refere a professora:

> "Esta actividade correu muito bem. Os alunos entusiasmaram-se com o trabalho e tentaram encontrar uma questão que obrigasse a pensar."

Apesar dos problemas apresentados pelas duas turmas serem do mesmo tipo, na turma A, os alunos procuraram quantias não muito pequenas ou colocaram a escolha num mês mais do final do ano. Na outra turma, de uma maneira geral, tal não foi levado em linha de conta. Nas duas turmas, a calculadora foi bastante utilizada na análise dos enunciados que foram surgindo.

Em conclusão, de uma forma geral, nesta actividade de formulação de problemas, os alunos das duas turmas trabalharam com grande entusiasmo.

Começa a notar-se, na maioria dos grupos da turma A uma tentativa de dificultar as questões para que a sua análise possa ser mais desafiadora. Esta tentativa, não é no entanto uma constante na outra turma. Assim, a maioria dos grupos formula um problema em que o enunciado é claro e bem organizado mas em que não são introduzidas questões cuja análise seja um pouco mais demorada. Por outro lado, nesta turma, a professora é ainda fundamental para ajudar alguns alunos a organizar inicialmente os aspectos em que é necessário reflectir.

De uma forma geral, os alunos analisam com mais facilidade a situação problemática e conseguem perceber mais facilmente os aspectos que terão de ter em linha de conta para inventarem um problema. A calculadora ajudou bastante os alunos a analisarem os enunciados que iam sendo propostos.

Quinta Actividade

Esta actividade surgiu na ficha 23. Na turma B, o grupo de referência, não teve a menor dificuldade em perceber o trabalho que deveria realizar. A partir da ideia - basta pôr a Maria a fazer qualquer coisa durante a viagem - referida por uma aluna do grupo, decidem que poderiam dizer que a Maria tinha estado a ouvir música durante uma parte da viagem. Uma aluna propôs que fosse durante metade da viagem, mas as outras contestaram porque era muito fácil escolher o esquema certo.

Assim, decidem que a Maria ouviu música durante 1/4 da viagem e que além de terem de desenhar um esquema que possa traduzir esta situação, devem procurar arranjar outro que quase pareça certo, para o problema não ser demasiado fácil. Com esta preocupação, começam então a desenhar e analisar vários gráficos. Consideram que o mais difícil é um gráfico em que a Maria não ouvia música de seguida, e depois de escolherem os outros gráficos que vão colocar nas opções, formulam o seguinte problema:

> "Numa viagem entre Lisboa e o Porto, a Maria esteve a ouvir música durante 1/4 da viagem. Qual das hipóteses a seguir é a mais correcta, sabendo que a parte escura é a que representa o tempo em que a Maria esteve a ouvir música?
> Hipótese A
> Hipótese B
> Hipótese C "

É interessante notar que este grupo, ao escolher as hipóteses que deveria incluir, decidiu escolher uma que fosse contrária da correcta porque, como dizia uma aluna, "assim baralha mais".

Os restantes problemas apresentados pelos alunos desta turma, também se baseiam em introduzir uma situação, em que ao longo da viagem tenha acontecido qualquer coisa à Maria (comer no vagão restaurante, ler um livro, adormecer) ou tenha acontecido qualquer coisa ao comboio (estar parado, descarrilar). Um grupo apresentou um enunciado impossível de resolver e outro um enunciado em que falta a legenda do gráfico. Como refere a professora, isto poderá estar relacionado com o facto de esta ter sido a primeira situação em que a tradução de um enunciado por meio de um gráfico foi abordada. No entanto, esta foi a primeira situação de formulação de problemas em grupo, em que todos os grupos trabalharam sem solicitar qualquer ajuda à professora. Isto pode ser considerado um avanço em relação a um maior entendimento do que é formular um problema que tenha como contexto determinada situação problemática, sobretudo porque os esclarecimentos dados pela professora nas actividades anteriores consistiam mais em perguntas do que em respostas. Assim, a professora procurava que os alunos analisasssem as principais relações e incentivava os alunos a formularem perguntas e a analisarem as experiências que iam realizando.

Na outra turma, o grupo de referência, rapidamente identificou que deveria inventar qualquer coisa que a Maria fizesse durante a viagem. Um aluno propõe:

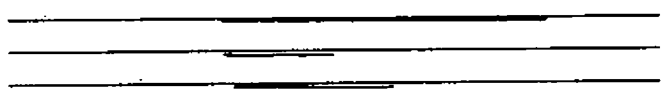
> "A Maria, depois de percorrer um terço da viagem, pode ir comer ao vagão restaurante."

> "Mas se não se disser mais nada fica muito fácil", diz logo outro aluno.

Começam a inventar situações que possam dificultar o problema, mas as únicas que lhes ocorrem são muito idênticas às da ficha. Mas como não conseguem sair deste impasse, um aluno sugere que escrevam um dos enunciados que tinha sido proposto:

> "A Maria quando já tinha percorrido 1/3 da viagem foi ao vagão restaurante comer uma sandes. Quando terminou tinha percorrido 1/4 do caminho que lhe faltava percorrer antes de ir comer a sandes. Em qual dos gráficos está assinalada a distância que ela percorreu enquanto comia?"

Começam então a desenhar o gráfico que corresponde a este enunciado. Depois de várias tentativas, conseguem desenhar o gráfico correcto (que não é uma tarefa imediata) e a partir daqui começam a identificar outro que possa confundir um pouco a escolha da opção correcta. Decidem que o tempo em que ela está no vagão restaurante pode ser 1/4 de todo o caminho em vez de ser 1/4 do caminho que falta percorrer. Completam asssim a formulação do problema que foi apresentado:

> "A Maria quando já tinha percorrido 1/3 da viagem foi ao vagão restaurante comer uma sandes. Quando terminou tinha percorrido 1/4 do caminho que lhe faltava percorrer antes de ir comer a sandes. Em qual dos gráficos está assinalada a distância que ela percorreu enquanto comia?
>
> 
> "
>
> Nota: a parte carregada corresponde ao tempo em que ela esteve no vagão restaurante"

Os restantes grupos desta turma formularam um problema idêntico a este. Esta actividade decorreu globalmente bem, pois cada vez é mais visível que os alunos trabalham com mais confiança na formulação de problemas, percebem o trabalho que têm que realizar e se envolvem numa análise que na sua opinião, lhes permita colocar uma questão não muito fácil.

Assim, nesta actividade de formulação de problemas os alunos das duas turmas manifestaram entusiasmo por esta tarefa e já não mostraram qualquer hesitação em relação ao trabalho que teriam de realizar. No entanto, muito relacionado com o facto de a ligação entre um enunciado e uma representação gráfica ter sido trabalhada pela primeira vez, um grupo não conseguiu elaborar um enunciado completamente correcto e outro apresentou uma questão impossível. Mas se pensarmos que nesta actividade os alunos tinham de operacionalizar relações pouco trabalhadas até aqui, podemos considerar que os resultados obtidos foram globalmente bons.

Comentários Gerais

Uma primeira análise dos enunciados apresentados pelos alunos, permite classificá-los em quatro categorias: enunciados que não contêm nenhuma questão, questões impossíveis, exercícios, e enunciados que poderiam eventualmente contituir, para jovens deste nível etário, problemas. A distribuição obtida com base nesta classificação é mostrada nos quadros 4 e 5.

Só na primeira actividade de formulação em grupo é que surgiu um enunciado em que não se era colocada qualquer questão e um enunciado de um exercício. De facto, a partir desta actividade e da reflexão que foi feita em torno dela, foi visível a preocupação dos alunos em analisar se estavam a formular um problema. Enquanto decorria o trabalho em grupo foi possível identificar várias situações em que um dos alunos do grupo chamava a atenção dos colegas para este aspecto - "assim quase não é preciso pensar", "assim é muito fácil", "não é um problema" - foram algumas das expressões usadas. Mas comparando as formulações de grupo com as individuais, podemos verificar que há ainda muitos alunos que revelam uma certa tendência para apresentar enunciados de exercícios. Por outro lado, o facto de os alunos terem formulado bastantes problemas do tipo dos

Quadro 4

Formulações de Problemas Realizadas em grupo

	Actividades			
	1ª	2ª	4ª	5ª
Enunciado sem pergunta	1	-	-	-
Questão impossível	-	-	-	1
Exercício	1	-	-	-
Problema	11	13	13	12

Quadro 5

Formulação de um Problema Realizada Individualmente

Exercício	18
Problema	28

Nota: 3 alunos da turma B não compareceram à aula em que foi resolvida esta actividade.

apresentados nas fichas de trabalho, pode ter influído bastante na não apresentação de exercícios.

No entanto, até porque ao longo de toda a experiência os alunos resolveram bastantes problemas, podemos afirmar que a grande maioria foi interiorizando progressivamente a diferença entre um problema e um exercício. Apesar disto, vários alunos ainda não conseguem, por si sós, enunciar um problema mas quando trabalham em grupo, perante o enunciado de um exercício, conseguem abandoná-lo ou reformulá-lo de forma a colocarem uma questão que pode ser considerada como um problema.

Ao longo das actividades de formulação de problemas a maioria dos alunos revelou crescente facilidade em conseguir colocar um problema plausível e cujo enunciado fosse claro e bem organizado. No entanto, os problemas apresentados, são na sua grande maioria semelhantes a outros já resolvidos. Este facto, revela a dificuldade que os alunos tiveram em, no contexto de uma situação problemática, ter criatividade e imaginação para levantar uma questão ainda não analisada. É também necessário sublinhar que nem em todas as actividades de formulação era necessariamente fácil inventar problemas significativamente diferentes. No entanto, da análise que foi sendo feita com as professoras do trabalho apresentado pelos alunos, pode-se sempre constatar que em todas as actividades de formulação era possível ser criativo inventando problemas que levantassem questões mais interessantes e complicadas de resolver.

Na primeira actividade de formulação de problemas era possível inventar problemas significativamente diferentes dos da ficha. Na descrição da forma como decorreu esta actividade, foi dado um exemplo de um problema que levantava questões ainda não analisadas. Como também então foi referido, nenhum grupo conseguiu inventar um problema mais interessante.

Na segunda actividade, que também permitia uma certa liberdade para a invenção de situações diferentes das levantadas na ficha, os enunciados apresentados por dois grupos levantam questões que implicam a realização de várias experiências e que colocam aspectos ainda não analisados na ficha de trabalho. Estas formulações foram as seguintes:

> "O Francisco obteve 195 pontos neste jogo. Sabendo que dispõe no máximo de 10 setas, quantas setas poderá ter usado e de que maneira acertaram no alvo?"

> "O Ricardo estava a jogar com o Vicente. Tinham os dois direito a 5 setas. O Vicente já tinha gasto todas as setas. Para ganhar ao Vicente, o Ricardo precisava de obter pelo menos 186 pontos com duas setas. Será possível o Ricardo ganhar? E empatar?"

O primeiro enunciado obriga a analisar em conjunto dois aspectos que na ficha de trabalho tinham sido estudados separadamente: o número de tiros e diferentes maneiras de acertar no alvo para cada número de tiros.

O segundo enunciado, tem em conta um aspecto interessante: dá a pontuação mínima que é preciso ter para ganhar o jogo e a partir daqui pergunta se é possível empatar, ou seja, obter essa pontuação menos um ponto. Apesar da situação poder ficar mais complicada se estivesse em jogo um maior número de setas, a verdade é que este grupo revelou uma certa criatividade por conseguir levantar uma questão ainda não explorada.

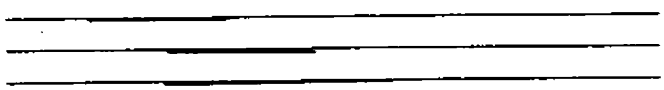
Na terceira actividade, não se colocava propriamente a questão de inventar um problema diferente. Tratava-se sim de inventar "uma jogada" que obedecia a determinadas regras e aonde se poderiam introduzir expressões cuja análise não implicasse apenas o domínio de técnicas de cálculo elementares. Com esta perspectiva, podemos considerar que 28 dos 46 alunos das duas turmas atingiram este objectivo nesta actividade de formulação.

Na quarta actividade, o raio de acção em termos de inventar um problema diferente, era bastante reduzido. Assim, tratava-se sobretudo de perceber que poderiam ser introduzidos novos aspectos que lançassem significativamente a dúvida sobre qual seria a melhor hipótese de mesada. Considerou-se que os alunos que introduziram uma situação que implicava uma escolha quase no fim do ano, revelaram uma certa preocupação em colocar uma questão que pudesse ser intrigante. 4 grupos da turma A e 1 da turma B formularam um problema que teve em conta estes aspectos. Foi o caso do seguinte problema:

> "A Marta precisava de 10000$00 para comprar umas calças da marca Uniform. Com qual das duas hipóteses de mesada ela poderia comprar as calças mais cedo?"

Na quinta actividade, tratava-se sobretudo de conseguir aliar um enunciado com uma representação gráfica que o pudesse traduzir. Alguns grupos, formularam problemas que se podem considerar uma simplificação do apresentado na ficha. Pelo contrário, 4 grupos da turma A e 2 da B, conseguiram formular um problema em que se referiam a várias partes da viagem e em que algum dos gráficos que traduzia o que se tinha passado na viagem representava um previsível erro de interpretação do enunciado.

Um destes problemas foi o seguinte:

> "A Maria gostava de ouvir música. Numa viagem de Lisboa ao Porto, quando tinha percorrido 1/4 da viagem começou a ouvir uma cassete. Quando acabou a cassete, ela ainda tinha de percorrer o triplo do que tinha percorrido a ouvir música. Sabendo que a parte carregada corresponde ao tempo em que esteve a ouvir música, qual dos gráficos traduz a viagem da Maria?
>
>  "

Tendo em conta o que foi anterirmente referido, considerou-se que alguns grupos conseguiram formular problemas que implicavam uma exploração ainda não feita da situação problemática. Assim, as formulações apresentadas pelos alunos foram divididas em dois grupos (ver quadros 6 e 7):

- o grupo I, em que se incluem os enunciados que se consideram mais interessantes, por de alguma forma, os alunos terem colocado uma questão ainda não analisada, mais intrigante ou mais original;

- O grupo II, em que se incluem os enunciados que não contêm nenhuma destas características.

Verificou-se, portanto, uma crescente tendência para, ao trabalhar em grupo, os alunos serem mais criativos inventando problemas que levantassem questões ainda não analisadas ou mais complicadas de resolver.

Ao longo das aulas em que os alunos formularam problemas, a forma como os alunos trabalharam e encararam esta actividade foi-se alterando.

Quadro 6

Classificação Atribuída às Formulações de Problemas Realizadas em Grupo

	Actividades 1ª	2ª	4ª	5ª
Grupo I	-	2	5	6
Grupo II	13	11	8	7

Quadro 7

Classificação Atribuída à Formulação de um Problema Realizada Individualmente

Grupo I	28
Grupo II	18

Nota: 3 alunos da turma B não compareceram à aula em que foi resolvida esta actividade.

Na primeira actividade o interesse dos alunos esteve muito ligado ao facto de poderem ser eles a "fazer perguntas". No entanto, a partir do momento em que encontravam um enunciado, ficavam satisfeitos e rapidamente davam por concluído o seu trabalho. Aqui, questões como a originalidade do problema, a organização e clareza do enunciado, não foram analisadas.

Na segunda actividade, a preocupação em formular problemas mais originais levou a uma análise bastante exaustiva da situação problemática o que conduziu a dois tipos de situação:

- alguns grupos inventaram histórias onde procuravam descrever uma situação diferente das abordadas na ficha. Ao inventarem uma história, os alunos trabalharam com visível prazer. Mas, ao integrarem no contexto da situação problemática uma história inventada por eles, os alunos acabaram por apresentar enunciados longos e pouco claros, que colocavam uma questão idêntica às da ficha.

- os restantes grupos analisaram, nalguns casos exaustivamente, possíveis enunciados. Esta análise, que regra geral foi bastante demorada pois nunca mais chegavam a uma formulação com que estivessem de acordo todos os elementos do grupo, levou mesmo alguns alunos a mostrarem um certo desânimo. Percebeu-se que estes alunos tinham a noção clara de que seria mais interessante formular um problema diferente, mas que perante as dificuldades que iam encontrando iam desanimando e catalogando a formulação de um problema como "muito difícil".

Nas restantes actividades de formulação de problemas os alunos manifestaram uma atitude mais equilibrada. Assim, era com maior facilidade que encontravam um problema com o qual estavam de acordo todos os elementos do grupo, identificavam mais facilmente aspectos que poderiam tornar a análise do problema mais interessante e apresentavam enunciados mais claros e bem organizados. Nesta altura, era bem visível o entusiasmo com que trabalhavam e a facilidade com que analisavam e experimentavam várias ideias.

Na formulação de problemas os alunos usaram fundamentalmente dois processos: partir da resolução de um exercício para formular um problema e partir da análise geral da situação para formular um ou vários enunciados.

Por exemplo, na segunda actividade de formulação de problemas, um grupo pensou da seguinte forma: se se responder a 7 perguntas pode-se, por exemplo acertar 4 e errar 3. Logo 40 pontos menos 21 dá 19 pontos. Com base neste resultado os alunos formularam o problema:

> "A Mafalda respondeu a 7 questões e obteve 19 pontos. Quantas respostas acertou e quantas errou?".

O mesmo processo foi também usado por alguns grupos para formularem um problema a propósito da ficha do tiro ao alvo. Assim, decidiam de quantas setas se poderia dispor e em que sítio do alvo acertaria cada uma delas. A partir daqui obtinham um valor para uma pontuação que era possível obter neste jogo, com base na qual formulavam o problema. Na quarta avtividade este mesmo processo foi usado por outro grupo da seguinte forma: começaram a calcular lado a lado, o dinheiro que se recebia ao fim de cada mês em cada hipótese de mesada e a partir da soma dos valores que iam obtendo formularam o problema.

No entanto outros grupos usaram um processo diferente. Foi o caso dos alunos, que na 2ª actividade inventariaram primeiro o que já se tinha perguntado na ficha de trabalho. Com base nesta análise chegaram à conclusão que podem combinar dois aspectos que nunca tinham sido analisados em conjunto: diferente número de setas e diferentes maneiras de acertar no alvo. Só a partir deste momento é que determinaram o valor da pontuação que vão considerar e enunciaram o problema. Para calcular esta pontuação os alunos também resolveram um exercício, só que não foi com base nesta resolução que eles decidiram o que iriam perguntar. Este mesmo processo foi usado por outro grupo na quarta actividade. Assim, primeiro verificaram que só se tinha pedido para optar pela mesada que desse mais dinheiro no final do ano, mas que, se se precisasse de dinheiro antes desta altura, a escolha da melhor hipótese poderia ser repensada.

Podemos pois dizer que fundamentalmente os alunos partiram de dois processos diferentes: uns para formularem um problema envolviam-se em primeiro lugar na execução de alguns cálculos e que era com base no resultado desses cálculos que formulavam um problema; outros analisavam em primeiro lugar o que já sabiam acerca da situação problemática e interrogavam-se sobre o que se poderia ainda perguntar.

O primeiro processo foi mais usado nas duas primeiras actividades que podemos caracterizar como tendo um contexto em que era possível estabelecer facilmente relações numéricas. Pelo contrário, o segundo processo foi mais usado nas duas últimas actividades.

De uma forma geral, quando usaram o segundo processo para partir para a formulação de um problema, os alunos analisaram um maior número de hipóteses e envolveram-se em discussões animadas e interessantes. Pelo contrário, usar o primeiro processo como ponto de partida para a formulação de um problema conduziu, regra geral, à análise de apenas uma hipótese e a discussões pouco animadas.

Conclusão

Quando trabalharam em grupo, os alunos apresentaram quase sempre formulações, que tendo em conta o seu nível etário, poderão constituir enunciados de problemas. Na formulação de um problema feita individualmente, 18 dos 46 alunos apresentaram enunciados que se podem considerar como exercícios.

Muitos dos problemas formulados eram semelhantes a outros já resolvidos pelos alunos. No entanto, ao longo das actividades de formulação de problemas, sobretudo na turma A, notou-se uma tendência para a introdução de aspectos que tornassem a análise do problema mais intrigante e a sua resolução mais complicada. De qualquer forma, formular um problema, mesmo sendo semelhante a um já anteriormente resolvido, envolveu sempre uma explicitação de relações que aprofundaram a compreensão que os alunos tinham da situação problemática em que estavam a trabalhar.

Notou-se uma evolução dos alunos quanto à maneira de encarar a formulação de um problema. Inicialmente, os alunos procuraram fazer uma pergunta possível, mas sem grandes preocupações quanto à sua originalidade ou quanto à organização e clareza do enunciado. Ao longo das actividades de formulação, os alunos foram progressivamente interiorizando o que é formular um problema. Assim, de uma forma geral, manifestaram especial cuidado na organização e clareza do enunciado, na elaboração de uma pergunta que fosse de facto um problema e não um exercício, e na procura de aspectos que pudessem tornar a questão que levantavam mais criativa.

A formulação de um problema foi uma actividade que proporcionou um grande envolvimento dos alunos em termos de trabalho de grupo. Na maioria dos grupos, as sugestões e críticas apresentadas por qualquer aluno do grupo eram ouvidas, exploradas e criticadas pelos restantes colegas.

Ao longo das actividades de formulação de problemas as professoras procuraram encorajar o trabalho dos alunos de várias formas: reflectindo sobre problemas diferentes que poderiam ser colocados a propósito de uma mesma situação, encorajando os alunos a explorar ideias, criticando o trabalho que apresentavam e avançando sugestões que o pudessem melhorar. Esta atitude foi muito importante para a evolução dos alunos em relação à formulação de um problema.

Na medida em que permitiu que os alunos averiguassem rapidamente como alterações nos dados de um problema afectavam a solução ou explorassem mais rapidamente vários enunciados e soluções, a calculadora foi um importante instrumento facilitador da formulação de problemas.

A Calculadora

Na Resolução e Formulação de Problemas

Analisando as potencialidades da calculadora ao nível da evolução observada no desenvolvimento da capacidade de resolver problemas, e retomando o que foi dito na secção referente à resolução de problemas, foi possível identificar vários aspectos.

Em primeiro lugar, o facto de este instrumento permitir efectuar os cálculos com muita facilidade, teve uma certa influência positiva na evolução dos alunos em relação à resolução de problemas. Assim, numa primeira fase, a calculadora foi sem dúvida muito importante para que os alunos não desistissem de trabalhar os problemas. Como que o facto de terem um instrumento que podia efectuar os cálculos, lhes dava uma certa confiança nas suas capacidades e os ajudava a persistir no trabalho. Vários alunos chegaram a afirmar: "com a calculadora a gente chega lá". Os alunos faziam as mais variadas tentativas, o apoio das professoras ainda era importante, mas não desistiam de resolver os problemas.

Também se pôde confirmar que a calculadora é uma ferramenta particularmente útil na resolução de problemas por uma abordagem de ensaio e erro sistemático. Assim, ao possibilitar que os alunos testem vários valores e analisem os resultados obtidos em cada testagem muito rapidamente, mantem-se vivo o interesse na resolução do problema. De facto, mesmo na fase em que alguns alunos tinham ainda dificuldades em implementar correctamente esta estratégia, sempre se pôde verificar o grande entusiasmo de todos até conseguir resolver o problema. Os alunos "agarravam-se" à calculadora e não desistiam enquanto não resolviam o problema. A maior dificuldade dos alunos, residiu na organização lógica dos vários ensaios e no registo dos resultados obtidos em cada um deles. Assim, aprender a trabalhar com um instrumento como a calculadora, em que não é possível manter o registo das várias experiências realizadas, foi um aspecto que teve de merecer especial atenção. Mas os alunos, quando trabalhavam em grupo, passaram a ser mais criteriosos na utilização da calculadora: tentavam delimitar os ensaios que deveriam fazer à partida, registavam na folha de trabalho os vários valores experimentados e faziam ensaios com base nos resultados das experiências anteriores.

Também na resolução de problemas em que é necessário identificar padrões de distribuição numérica a calculadora foi particularmente útil. Assim, a partir da análise de um esquema ou de uma tabela, os alunos usaram a calculadora e executaram com facilidade a fórmula de recorrência que tinham identificado. No entanto, como já foi referido, a calculadora não favoreceu a procura da expressão do termo geral para gerar os termos das diferentes sucessões.

O uso deste instrumento também favoreceu a análise de algumas questões relacionadas com o mesmo problema. Por exemplo, no problema da ficha 21, alguns alunos tomaram a iniciativa de modificar a hipótese A de forma a que ela pudesse ser mais vantajosa. Com a calculadora, puderam explorar rapidamente algumas alterações a esta hipótese e aperceber-se das modificações que deveriam introduzir. Também no problema dos descontos e impostos (ficha 22) a calculadora facilitou que alguns alunos analisassem, por sua iniciativa, várias questões relacionadas com ele. Por exemplo, um grupo, ao tentar perceber se a ordem por que se calculava o imposto e o desconto era indiferente, experimentou outras percentagens para verificar se a conclusão a que chegavam seria a mesma. A extensão deste problema à análise do ponto de vista do comerciante e de quem cobra o imposto, também foi bastante facilitada pela utilização da calculadora.

Ao nível da resolução individual de problemas, pôde-se no entanto observar algumas dificuldades em conciliar o trabalho feito com a calculadora e o registo escrito desse trabalho. Assim, nalguns trabalhos escritos, alguns passos de resolução do problema eram omitidos. Foi o que aconteceu, por exemplo, em algumas das resoluções da Ficha B. Depois de identificarem a fórmula de recorrência, alguns alunos apenas indicaram a solução do problema para uma árvore de tamanho 100 mas não registaram valores intermédios nem explicaram a forma como tinham utilizado a calculadora.

Também em relação à formulação de problemas a calculadora foi um instrumento facilitador. Assim, como já foi dito na secção correspondente à formulação de problemas, pôde-se observar que a calculadora foi particularmente útil em dois aspectos. O primeiro diz respeito à exploração dos diferentes enunciados que os alunos iam propondo. Sobretudo nas situações problemáticas em que o contexto era numérico, alguns grupos inventaram vários problemas, facilitando a calculadora a análise de cada um deles.

O segundo aspecto refere-se à apresentação de enunciados mais interessantes. Como já foi referido, vários grupos apresentaram problemas com mais de uma solução. Também aqui foi muito importante a calculadora pois os alunos entusiasmavam-se na procura das relações que podiam estabelecer e de todas as soluções do problema que apresentavam. Na quarta actividade (ficha 21), vários grupos usaram a calculadora de forma a saberem mês a mês quanto é que se ganhava com cada hipótese de mesada de forma a poderem colocar uma questão que implicasse uma escolha quase no final do ano (onde as quantias das duas mesadas se começavam a aproximar).

Podemos pois concluir que a calculadora, na medida em que facilitou a análise de alterações aos dados de um problema, de vários enunciados e de várias soluções, se revelou um precioso instrumento facilitador na formulação de problemas.

Para além das potencialidades da calculadora ao nível da formulação e resolução de problemas e de facilitar a resolução de actividades que, apenas com o recurso ao papel e lápis, se tornariam fastidiosas, a utilização da calculadora teve algumas implicações ao nível do processo de ensino-aprendizagem que importa realçar. Como as professoras referiram, alguns conteúdos puderam ser trabalhados de uma forma que se revelou extremamente positiva.

Por exemplo, as propriedades da adição e da multiplicação em Q são muitas das vezes trabalhadas de uma forma que desafia muito pouco a curiosidade e o interesse dos alunos. Mas, ao jogarem seguindo as regras apresentadas na ficha 19, os alunos puderam sentir as verdadeiras vantagens que o conhecimento destas propriedades pode dar no cálculo de expressões numéricas. De facto, pôde-se observar nas duas turmas um grande entusiasmo em jogar da melhor forma possível, o que neste caso, implicava distinguir situações em que a utilização da calculadora se tornava ou não necessária.

A multiplicação em Q também foi trabalhada a partir da utilização da calculadora. Os alunos puderam assim relacionar os vários resultados obtidos e sistematizar as conclusões a que tinham chegado. Uma das professoras salientou: "em vez de copiarem do quadro uma série de regras, puderam ser eles a encontrá-las e a utilizá-las sem qualquer ajuda".

Também nas actividades em torno dos conceitos de divisor e de múltiplo, a utilização da calculadora permitiu um trabalho mais autónomo e diversificado. Os alunos encontravam facilmente valores que obedeciam a determinadas condições, podiam trabalhar com números maiores e analisar os resultados de um grande número de experiências.

Como as professoras salientaram, a calculadora ajudou a desenvolver nos alunos uma atitude de investigação e de análise das situações em conteúdos em que habitualmente só se praticam aspectos rotineiros.

O Uso pelos Alunos

Desde o início da experiência que se pôde observar um grande desembaraço dos alunos na utilização da calculadora. Assim, utilizaram-na com bastante desenvoltura e tomaram muitas vezes a iniciativa de averiguar a função de algumas teclas com que ainda não tinham trabalhado. Como já foi referido, a tendência inicial para resolver as questões apresentadas "agarrando" a calculadora e experimentando vários valores, foi-se progressivamente atenuando. Os alunos passaram a tentar primeiro organizar o trabalho que deveriam realizar e a manter um registo dos resultados que iam obtendo.

Outro aspecto que também se pôde observar foi que fazer cálculos não era sinónimo de utilizar a calculadora, pois os alunos só a usavam nas situações em que consideravam que ela lhes facilitava o trabalho. Por exemplo, no cálculo do valor de uma expressão numérica, talvez porque as máquinas que utilizavam não respeitavam as prioridades das operações e por a introdução de números negativos não ser directa, os alunos preferiam fazer os cálculos com papel e lápis. Claro está que isto não significa que não a tenham usado em situações de cálculo bastante elementar. Mas como uma professora refere:

> "Sempre tive alunos que não sabiam a tabuada e não foi por não usarem uma calculadora que eles a ficaram a saber."

Esta professora acrescenta:

> "Há regra geral um grande receio que os alunos fiquem completamente dependentes da máquina de

calcular. Mas este ano pude verificar que embora alguns alunos utilizem a máquina para efectuar alguns cálculos elementares, o que se ganha com a utilização da calculadora pode ser muito mais importante. Por exemplo, os alunos não ficam assustados se num problema que lhes seja proposto, numa expressão ou numa equação, surgirem números decimais ou números muito grandes."

A outra professora refere:

"Notei que estes alunos desenvolveram um maior sentido do número. Talvez por a calculadora possibilitar um trabalho mais intenso com números decimais, em vez dos habituais números inteiros e fraccionários, ficaram com uma percepção mais completa dos números e das suas relações."

Também a questão da calculadora entusiasmar os alunos a trabalhar foi referida pelas professoras. O facto de terem uma calculadora à disposição, incentivou os alunos, sobretudo os mais fracos, a tentarem resolver as questões que lhes eram colocadas.

Os Alunos Perante a Calculadora

As respostas dadas pelos alunos ao questionário (anexo 5), permitem destacar alguns aspectos relativos à forma como eles encararam a utilização da calculadora nas aulas de Matemática. Embora só a terceira questão se relacionasse explicitamente com a calculadora, as respostas à primeira questão também permitiram a análise de alguns aspectos com ela relacionados Assim, ao descreverem a um amigo o modo como decorreram as aulas de Matemática, foi interessante verificar que praticamente todos os alunos incluiram uma referência à utilização da calculadora. Para muitos alunos, a utilização deste instrumento foi um aspecto "diferente" que facilitou a aprendizagem. De entre as respostas dos alunos salientando este aspecto destacamos as seguintes:

> "A matéria parecia não ter pés nem cabeça e até podíamos usar a calculadora. Mas acabávamos por ver que tinha conclusões muito lógicas. Era interessante e divertido..."

> "Este ano as aulas de Matemática foram muito invulgares, pois podia-se usar a calculadora ... "

> "Nas aulas de Matemática aprendi alguma coisa sobre trabalhar com a calculadora. Vê bem, aprendi a resolver as coisas de uma maneira muito diferente e o mais incrível é que aprendi aquilo num instante..."

Na resposta à questão directamente relacionada com a calculadora, há uma aspecto comum: a sua utilização facilita os cálculos. Mas, vários alunos, destacam outros aspectos. Assim, em várias respostas, há a ideia de que a calculadora ao aliviar o peso do cálculo, facilita o trabalho em torno da resolução de problemas e realça a importância de saber pensar nas questões que são colocadas. Por exemplo, de entre as várias respostas em que se podem perceber estas ideias, destacamos as seguintes:

> "Como podemos usar a calculadora isso faz com que a gente possa pensar no que se pede..."

> "Facilita-nos a perceber e a resolver problemas porque não temos que estar preocupados com as contas"

> " ... Penso que de certa forma tem mais valor saber como se resolvem as coisas e ter noção das

> "... mais variadas maneiras para as resolver do que saber fazer contas ..."

Também, o facto de a utilização da calculadora permitir a resolução de problemas que de outra forma se tornariam fastidiosos ou mesmo impossíveis de resolver, surgiu nalgumas respostas dos alunos:

> "Podíamos resolver problemas complicados, que com o método antigo não se podia..."

> "... Podíamos resolver problemas com números muito grandes que não era aborrecido"

Mas, a ideia de que, apesar de a calculadora facilitar os cálculos, é preciso saber trabalhar com ela e saber criticar os resultados, ficou também vincada nos alunos. Como alguns referiram:

> "... A máquina pode-nos ajudar muito mas é preciso saber trabalhar com ela"

> "... Mas aquilo não é só carregar nos botões, precisamos de saber como a máquina funciona."

> "Ajudava muito nos cálculos. Mas nos números negativos, se não tivessemos cuidado, a máquina baralhava tudo.

> "Facilitava muito as contas mas tínhamos que ter cuidado em pensar e saber trabalhar com a máquina..."

Podemos pois afirmar, que embora o aspecto mais realçado tenha sido o da grande facilidade nos cálculos, os alunos aperceberam-se de algumas potencialidades e limitações deste instrumento. Assim, estes alunos entenderam, que apesar da grande facilidade de cálculo deste instrumento, é indispensável saber como ele funciona. Por outro lado, as principais potencialidades que os alunos identificaram têm a ver com a resolução de problemas e com a valorização dos aspectos de raciocínio. Em relação à resolução de problemas há duas vantagens que são claramente identificadas pelos alunos: permitir que um maior leque de problemas possam ser resolvidos e possibilitar que eles se concentrem no processo de resolução. Finalmente, alguns alunos também realçaram a ideia de que mais importante do que saber só fazer cálculos, é saber pensar sobre as diferentes questões que lhes são apresentadas e procurar um processo para as resolver.

Conclusão

A calculadora facilitou a persistência dos alunos na resolução de um problema. Este instrumento, ao aliviar o peso dos cálculos, ajuda a criar um clima em que os alunos têm mais confiança nas suas capacidades e em que não desistem de trabalhar após uma primeira tentativa frustrada de resolução de um problema.

A calculadora facilitou a resolução de problemas por meio de uma estratégia de ensaio e erro sistemático e a descoberta e exploração de padrões de distribuição numérica.

Em várias actividades de formulação de problemas, os alunos procuraram e exploraram diferentes relações entre os dados. A calculadora, na medida em que facilitou este trabalho, ajudou a que os alunos analisassem vários enunciados e soluções.

Desde o início da experiência que os alunos trabalharam com bastante desenvoltura com a calculadora. Tomaram mesmo a iniciativa de perceber a função de algumas teclas com que ainda não tinham trabalhado. A tendência inicial de recorrerem à calculadora antes de analiserem possíveis caminhos para resolver as questões propostas foi-se atenuando. Também passaram a manter um registo escrito das várias experiênias que faziam com a calculadora.

As professoras também referiram que a utilização da calculadora favorece nos alunos um maior sentido do número e que os incentiva a tentar resolver as questões propostas.

Vários alunos referiram que a utilização da calculadora nas aulas de Matemática foi uma experiência nova que os entusismou a trabalhar e facilitou a aprendizagem da Matemática. Pôde-se verificar que os alunos perceberam que embora a utilização da calculadora facilite muito os cálculos, é necessário ter alguns cuidados e saber como ela funciona. A questão da calculadora permitir alargar o leque de problemas que se podem resolver e facilitar a concentração nos processos de raciocínio, foi também referida pelos alunos.

O Trabalho em Grupo

Ao trabalho em pequenos grupos é frequentemente atribuído um papel importante no sentido de ajudar a deslocar um ensino da

Matemática muito centrado na prática de técnicas rotineiras para um ensino mais atento à construção e exploração de conceitos e à resolução de problemas. As potencialidades deste tipo de trabalho no sentido de facilitar o sucesso dos alunos e de desenvolver atitudes de auto-estima e relações pessoais positivas, são também frequentemente referidas.

Nesta secção procura-se descrever e analisar os dados recolhidos a respeito do trabalho em grupo. Os aspectos relativos a este ponto foram muito fundamentados nas observações das aulas e na opiniões dos alunos e das professoras.

Os Alunos e o Trabalho em Grupo

A leitura das respostas dos alunos realçou o facto de que eles, na sua esmagadora maioria, gostaram de trabalhar em grupo. Nas respostas ao questionário, só quatro alunos colocaram algumas reservas ao trabalho em grupo. Estes alunos criticaram sobretudo o modo de funcionamento do seu grupo. Como referiram:

> "...às vezes era muito chato porque nem todos trabalhavam. O meu grupo até não era mau, mas distraía-se com muita frequência e isso às vezes dava uma certa confusão.

> "Não gostei muito do meu grupo porque nem todos trabalhavam. Também havia muito barulho, às vezes falávamos todos ao mesmo tempo e ninguém se entendia..."

> "...não gostei muito do grupo em que fiquei porque algumas pessoas não se entendiam a trabalhar. Para mim trabalhar em grupo até nem é mau mas prefiro trabalhar sózinho."

O facto de gostar ou não de trabalhar em grupo está muito ligado ao tipo de relações que os alunos vão estabelecendo entre si e à forma como se organizam para trabalhar. Nas respostas destes alunos, estes aspectos são bem salientados. Assim, não se trata propriamente de não gostar "em abstracto" de trabalhar em grupo, mas sim de criticar os aspectos negativos que este tipo de trabalho pode ter. Em primeiro lugar, a questão de haver alunos que têm uma atitude passiva no grupo. O facto de sentirem que nem todos se empenham da mesma forma, levou estes alunos a colocar algumas reservas a este tipo de trabalho. A organização ao nível do trabalho também foi criticada. Como referiram, gerava-se uma certa confusão porque todos falavam ao mesmo tempo ou porque se distraiam do trabalho com facilidade, o que dificultava entenderem-se na resolução das questões que lhes eram colocadas.

No entanto, as respostas dos restantes alunos evidenciam um grande entusiasmo por este tipo de trabalho:

> "Gostei de trabalhar em grupo com os meus colegas porque nos ajudávamos mutuamente para resolver problemas. Senti que cada um tinha uma grande responsabilidade, porque o trabalho dependia de todos. Foi uma boa experiência que devia continuar."

> "... Senti-me bem a trabalhar em grupo porque no meu grupo todos se davam bem e conseguiamos trabalhar bem. Sabia que não estava sozinho a resolver as perguntas das fichas e que tinha colegas para me ajudar."

> "... Em vez de termos de estar sozinhos a pensar e só dar as nossas ideias, quando trabalhávamos em grupo eram mais cabeças a pensar. Quase nunca ficávamos atrapalhados sem saber resolver as perguntas. Havia várias soluções e podíamos pensar na que seria melhor para resolver as perguntas.

" ...Trabalhar em grupo foi muito bom porque quando um colega do grupo põe uma dúvida, podemos discutir e chegamos sempre a uma conclusão certa. Também tive hipótese de conhecer as várias maneiras de pensar dos meus colegas e isso ajudou-me a perceber algumas coisas da matéria."

Os aspectos realçados pelos alunos relacionam-se com a compreensão do valor da cooperação. Assim, nas respostas que apresentaram, os alunos realçam a discussão de ideias e de caminhos capazes de levar à resolução das tarefas que lhes eram apresentadas. Alguns chegam mesmo a afirmar que quando trabalham em grupo chegam sempre a conclusões certas. Os alunos acreditavam que em grupo, podiam fazer frente às dificuldades que lhes surgiam e que regra geral as conseguiam ultrapassar com sucesso. Outro aspecto também referido foi o de perceber diferentes maneiras de pensar nas questões. Assim, os alunos referiram que o facto de poderem discutir várias propostas de resolução e de tentarem perceber a maneira como os seus colegas pensaram ajudava a compreender a matéria. Os alunos perceberam que a análise de vários processos de resolução enriquece os conhecimentos de cada um.

Ao longo de toda a experiência foi visível o crescente prazer com que a grande maioria dos alunos trabalhava em grupo. Os alunos entusiasmavam-se com o trabalho, preferiam não fazer intervalo entre as duas horas de aula e se ainda não o tinham concluído quando acabava a aula, era com alguma tristeza que o interrompiam.

O Trabalho em Grupo e a Aprendizagem da Matemática

Na definição do projecto, uma das preocupações foi a de relacionar a organização do trabalho a nível da sala de aula com a natureza das actividades que se propunham. Assim, na resolução e formulação de problemas, e em geral nas actividades de exploração, investigação e descoberta, privilegiou-se o trabalho em pequenos grupos.

Desde o início, várias questões se colocaram. Como evoluiriam os alunos em relação ao trabalho em grupo? Em que medida este tipo de trabalho facilitaria o desenvolvimento da capacidade de resolver e formular problemas? De uma forma geral, que outras potencialidades se poderiam reconhecer ao trabalho em grupo?

A questão da evolução dos alunos em relação ao trabalho em grupo, apesar de em parte ter correspondido ao esperado, vincou alguns aspectos que importa referir. Em primeiro lugar, conseguir que os alunos discutam estratégias e soluções, aceitem e critiquem propostas dos seus colegas demora muito tempo. Como referiu uma professora:

> "Nas aulas de trabalho de grupo, andava numa roda viva, de grupo para grupo, e os alunos só avançavam no trabalho quando eu os apoiava. Mas mal aparecia outra dificuldade não tentavam sequer pensar nela, esperavam que eu fosse outra vez ajudá-los."

De facto, durante muito tempo, o avanço do trabalho dos alunos dependia muito do apoio dado pelas professoras. Por si sós, os alunos não discutiam as sugestões apresentadas por algum colega do grupo de uma forma que pudesse contribuir para o avanço do trabalho. Perante as primeiras dificuldades, esperavam o apoio das professoras para decidir o caminho a seguir. O facto de na maior parte das vezes elas não avançarem com soluções, também não levava a uma grande melhoria em termos da organização do trabalho. Em cada grupo surgiam várias maneiras de resolver as questões mas os alunos não as discutiam: cada um repetia a sua ideia mas não "ouvia" a dos outros. Sobretudo na turma B, os alunos eram agressivos para com os seus colegas quando estes não percebiam os seus pontos de vista e contestavam a professora por esta querer que eles respondessem a questões sem explicar como as poderiam resolver. Como referiu a professora desta turma:

> "Quando não se entendiam a trabalhar chamavam-se nomes uns aos outros e discutiam violentamente... também se revoltavam comigo por eu não lhes fazer a papinha toda e procurar que fossem eles a pensar nas questões."

Como referiram, o que em certa medida espantou as professoras não foi o facto de se terem encontrado estas dificuldades no início do trabalho, mas sim o tempo que os alunos levaram a melhorar a forma como se organizavam em grupo. Reflectindo sobre esta questão uma professora comentou:

> "Se não estivesse a trabalhar em equipa provavelmente teria desistido. Parecia que os alunos nunca mais conseguiam ter uma certa autonomia em relação ao trabalho."

Foi pois necessária uma certa persistência e bastante trabalho para que os frutos do trabalho em grupo começassem a ser sentidos. No final do primeiro período observaram-se algumas mudanças: cada vez mais os alunos conseguiam trabalhar sem solicitar constantemente as professoras, começava-se a notar que procuravam perceber e discutir as sugestões dos seus colegas e que, o facto de poderem ser eles a tentar resolver as actividades que lhes eram propostas, os começava a entusiasmar. Embora com algumas diferenças, no final da experiência, os alunos das duas turmas conseguiram uma boa organização ao nível do trabalho em grupo, sendo, para muitos deles, a forma de trabalho que preferiam. Analisando esta questão, a professora da turma A caracterizou assim o que foi conseguido em termos do trabalho de grupo:

> "Na minha turma, acho que na generalidade eles sempre encararam bem o facto de trabalharem em grupo... Acho é que que foram trabalhando melhor e gostavam cada vez mais de trabalhar em grupo...Em quase todas as aulas havia alunos que mal entravam na sala perguntavam se iam trabalhar em grupo. Se eu lhes dizia que sim, iam arrumar as mesas muito satisfeitos. Penso que conseguiram trabalhar calmamente e apresentar resoluções correctas das fichas... O trabalho que faziam era de facto em grupo."

Em relação a este aspecto a professora da turma B referiu:

> "Os alunos modificaram bastante a atitude ao trabalhar em grupo. Não posso dizer que todos tenham gostado de trabalhar em grupo, mas acho que foram melhorando bastante e percebendo que é importante trabalhar em grupo. Que é importante discutir as ideias dos outros e não ficar sózinho a pensar pois as ideias dos outros podem ajudar. No final, a grande maioria dos grupos já conseguia chegar a conclusões correctas sem precisar da minha ajudada."

Quanto à relação entre o trabalho em pequenos grupos e o desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas, retomando o que foi dito anteriormente, observou-se que o trabalho em grupo favoreceu a persistência dos alunos em relação à resolução de problemas. De facto, foi possível observar muitas situações em que os alunos se envolviam no trabalho, discutindo entre si sugestões que poderiam ajudar a avançar. A partir da primeira fase da experiência, só em dois grupos da turma B se verificaram situações em que desistiam de, por si sós, resolverem os problemas. Nos restantes grupos pôde-se observar que cada vez mais os alunos assumiam as tentativas falhadas como um desafio para alterarem o caminho seguido de modo a conseguirem resolver os problemas.

Na formulação de problemas o trabalho de grupo foi muito importante. Na descrição feita anteriormente da forma como decorreram estas actividades podemos encontrar bastantes exemplos disto. De facto, sobretudo quando os alunos tentavam inventar um enunciado mais original ou explorar várias soluções, pôde-se observar que avançavam a partir das observações feitas por algum aluno do grupo e das discussões e tentativas em que os seus elementos se envolviam.

Para além dos aspectos já referidos, foi possível observar que o trabalho em grupo favorece uma maior participação dos alunos mais fracos. A nossa experiência diz-nos que há habitualmente uma grande tendência para que estes alunos só participem no trabalho quando são "obrigados" pelo professor. Mas, ao longo do ano, pôde-se observar uma crescente participação destes alunos. Por exemplo, o Cláudio foi um dos alunos em que esta mudança foi bem visível. Nas notas recolhidas na reunião em que se reflectia sobre a forma como tinha decorrido a quarta semana de aulas, a certa altura foi registado: "a professora da turma A referiu que já não sabe o que fazer com o Cláudio. É um aluno que parece ter dificuldades mas que quase que não participa no trabalho do grupo pois leva o tempo a distrair os outros e não pára quieto". Na última reunião do mês de Janeiro o Cáudio foi novamente referido: "a professora da turma A considera que o trabalho em grupo está a correr muito bem. ... um dos alunos que está completamente diferente é o Cláudio que passou a trabalhar com bastante entusiasmo no grupo."

Muitas das actividades que os alunos resolveram em grupo também levantaram dificuldades aos melhores alunos. Talvez porque à partida ninguém conseguia resolver rapidamente algumas das questões propostas nas fichas, estabeleceu-se em muitos grupos um ambiente de trabalho em que todos eram chamados a dar uma opinião e em que isso era valorizado. O grande desafio era que o grupo apresentasse um trabalho o mais completo possível e os alunos foram-se apercebendo que todos podiam contribuir para isto.

Apesar de se ter observado uma crescente participação de todos os alunos das duas turmas, o problema da passividade de alguns nunca foi totalmente ultrapassado. De facto, embora a esmagadora maioria participasse activamente no trabalho, pôde-se observar que sempre houve alunos que regra geral "assistiam" ao trabalho que os seus colegas realizavam. As professoras analisaram esta questão várias vezes com os alunos, procurando que o grupo se sentisse responsabilizado pela participação de todos os seus elementos e que cada aluno percebesse que deveria participar no trabalho. No entanto, em alguns casos, este aspecto nunca foi totalmente ultrapassado.

Conclusão

A grande maioria dos alunos gostou de trabalhar em grupo. De uma forma geral, consideraram que este tipo de trabalho ajudou a ultrapassar as dificuldades que surgiram e a perceber a vantagem de confrontar várias maneiras de pensar. Só quatro alunos, colocaram algumas reservas a este tipo de trabalho decorrentes do inadequado funcionamento do respectivo grupo.

Os alunos tiveram muitas dificuldades iniciais em trabalhar em grupo. Cada um repetia a sua ideia sem "ouvir" a dos seus colegas e, em vários grupos, os alunos eram bastante agressivos. No entanto, lentamente, foram conseguindo uma boa organização a este nível e ganhando um visível prazer e entusiasmo por este tipo de trabalho. O trabalho em grupo também favoreceu a integração dos alunos mais fracos na realização das actividades propostas. Apesar da crescente participação da maioria dos alunos, a passividade de alguns foi um problema que sempre persistiu.

Ao longo da experiência pôde-se observar as grandes potencialidades do trabalho de grupo ao nível da resolução e formulação de problemas Assim, a persistência na resolução de um problema, a procura de um enunciado mais original ou a exploração de várias soluções do problema que formulavam, foram favorecidas por os alunos trabalharem em grupo.

C A P Í T U L O 6

CONCLUSÕES

Este estudo, situou-se no contexto de uma experiência de ensino-aprendizagem da Matemática em que se valorizou a resolução de problemas e a exploração de situações problemáticas usando a calculadora como um instrumento facilitador. O seu principal objectivo era estudar a forma como os alunos evoluiam em relação à resolução e formulação de problemas, ao trabalho em pequenos grupos e à influência da calculadora nesta evolução.

Neste Capítulo apresentam-se as conclusões decorrentes do tratamento dos dados e colocam-se diversas questões que poderão ser consideradas em futuras investigações.

Conclusões Gerais

Resolução de Problemas

1. Os alunos evoluíram significativamente em relação à capacidade de resolver problemas. Ao nível do trabalho em grupo, revelaram uma crescente facilidade em compreender os problemas, em implementar estratégias adequadas à sua resolução e em organizar o trabalho escrito de uma forma adequada. Os alunos passaram a conseguir resolver os problemas numa atitude de crescente autonomia, deixando de solicitar qualquer ajuda às professoras.

Em relação à resolução de problemas feita individualmente, alguns alunos ainda evidenciavam dificuldades em resolver, de uma forma correcta, os problemas apresentados. No entanto, um grande número deles conseguia mostrar uma certa compreensão dos problemas propostos e procurar estratégias adequadas para a sua resolução.

2. Em relação à utilização de estratégias de resolução de problemas pelos alunos, foi também possível observar uma grande evolução. Assim, na resolução de problemas por ensaio e erro sistemático, passaram a organizar logicamente os vários ensaios e a manter o registo dos resultados obtidos em cada um. Também foi com crescente facilidade que os alunos identificaram padrões de distribuição numérica e implementaram a fórmula de recorrência na resolução de problemas.

3. Houve uma clara evolução em relação à persistência na resolução de um problema. Os alunos desenvolveram confiança nas

suas capacidades não desistindo de trabalhar perante uma primeira tentativa frustrada. Em relação a este aspecto notou-se mesmo um corte radical com a atitude por eles inicialmente evidenciada. Os alunos encaravam os problemas como um desafio que eram capazes de ultrapassar.

4. Na medida em que os alunos revelaram uma crescente facilidade em analisar as situações apresentadas e em propor diferentes processos para a sua resolução, a resolução de problemas influenciou positivamente o processo de ensino-aprendizagem. Por outro lado, alguns problemas, ao contextualizarem a exploração de conceitos facilitaram a sua compreensão.

5. Os alunos consideraram que o trabalho realizado em torno da resolução de problemas foi uma experiência que os entusiasmou e que lhes deu uma ideia diferente da Matemática. Para a maioria dos alunos, a resolução de problemas "ajuda a saber pensar" facilitando assim a compreensão dos conteúdos estudados. Para outros, embora em número mais reduzido, a resolução de problemas é sobretudo motivadora, uma vez que os entusiasma a trabalhar e a analisar situações que podem surgir no dia-a-dia.

6. A apresentação escrita da resolução de um problema foi um aspectos em que os alunos tiveram algumas dificuldades. A elaboração de um ensaio escrito que descrevesse de uma forma clara os aspectos fundamentais que levaram à resolução do problema revelou-se difícil para os alunos. Embora também evidenciando algumas dificuldades iniciais, os alunos conseguiram com mais facilidade apresentar resoluções em que

registavam o trabalho que iam realizando à medida que resolviam os problemas.

Pode-se pois concluir que em relação a muitos dos aspectos relacionados com a resolução de problemas os alunos evoluiram significativamente. Mas é importante realçar que esta evolução foi lenta e implicou muito trabalho e envolvimento das professoras. Vários autores consideram que para que uma dada tarefa constitua um problema para um dado indivíduo, este deve empenhar-se activamente na procura de uma solução (Lester, 1983; Ponte, 1991b). Ora, nas primeiras actividades de resolução de problemas, os alunos mal liam o enunciado, faziam, quanto muito, uma tentativa de resolução e se ela não era bem sucedida (o que acontecia na maior parte dos casos), solicitavam de imediato a ajuda das professoras. Os alunos esperavam que as professoras lhes explicassem detalhadamente o que deveriam fazer. A passagem para um envolvimento activo, em que persistentemente se realizam e analizam com entusiasmo vários caminhos de resolução de um problema, foi lenta e envolveu um grande dispêndio de tempo.

Ao longo da experiência adoptou-se uma forma de trabalhar os problemas que assentava no trabalho em grupo. Como foi referido, pôde-se verificar que todos os grupos passaram a resolver com grande sucesso os problemas que lhes eram apresentados. No entanto, ao nível das resoluções individuais, os progressos não foram tão significativos. Estes resultados podem reflectir a necessidade do ensino da resolução de problemas proporcionar oportunidades de trabalho individual. Schoenfeld (1992), chama a atenção para este aspecto, ao considerar que a organização do trabalho em pequenos grupos pode não ser a "melhor" e que a forma "ideal" de trabalhar a resolução de problemas na sala de aula é um assunto que precisa de mais reflexão e investigação.

Charles e Lester (1984), analisando os resultados obtidos com a implementação de um Programa de Resolução de Problemas em 24 turmas (11 do 5º ano e 13 do 7º ano), referem que os professores destas turmas afirmaram frequentemente que os alunos tinham *aprendido a pensar*. Alguns destes professores também consideraram que os seus alunos evidenciaram perceber melhor outros conteúdos do programa. Como já foi referido anteriormente, estes aspectos foram muito realçados pelos alunos envolvidos nesta experiência. Com as actividades desenvolvidas em torno da resolução de problemas também estes alunos consideraram que *aprenderam a pensar* e que *percebiam a matéria com mais facilidade*.

Formulação de Problemas

1. Quando trabalharam em grupo, quase sempre os alunos conseguiram apresentar enunciados de questões que se podem considerar problemas. No entanto, na formulação que fizeram individualmente, 18 dos 46 alunos apresentaram enunciados de questões que não são mais do que simples exercícios.

2. A maioria dos enunciados propostos pelos alunos eram do tipo dos apresentados nas fichas de trabalho. No entanto, ao longo das actividades de formulação de problemas pôde-se observar que cada vez mais os alunos conseguiam introduzir aspectos que tornavam o problema que propunham mais intrigante e

a sua resolução mais complicada. Neste sentido, pode-se afirmar que a formulação de problemas ajudou a aprofundar a compreensão das situações problemáticas estudadas.

3. Também em relação à forma como os alunos encaravam a formulação de problemas pôde ser observada uma certa evolução. Cada vez mais se envolviam activamente na procura de aspectos que tornassem o seu enunciado mais criativo, e se entusiasmavam na análise de várias questões e soluções.

4. De uma forma geral, na formulação de um problema, os alunos partiram de dois processos distintos: com base na resolução de um exercício formular um problema, ou com base na análise geral da situação problemática, formular um ou vários enunciados. No primeiro processo, os alunos estabeleciam previamente algumas relações entre os dados calculando assim determinado valor com base no qual inventavam um enunciado. No segundo processo os alunos partiam de uma análise dos aspectos já explorados e procuravam identificar outros ainda por analisar antes de efectuar qualquer cálculo.

5. As actividades de formulação de problemas proporcionaram um grande envolvimento dos alunos em termos de trabalho de grupo. De um modo geral, os alunos procuraram que todos os seus colegas participassem no trabalho, analisando e criticando a opinião de cada um.

A conclusão 2 está de acordo com os resultados de investigações recentes (Moreira, 1989; Saraiva, 1991). De facto, verificou-se uma certa tendência para que os alunos formulassem problemas com uma estrutura idêntica a outros anteriormente resolvidos. Como estes autores consideram, esta conclusão não é propriamente de estranhar uma vez que era pedido aos alunos a formulação de um problema baseado num contexto que já tinha sido explorado com a resolução de alguns problemas. Tendo em conta a forma como decorreu a experiência e a evolução observada, consideramos que o tipo de situação apresentada parece adequado a um início de trabalho nesta área; no entanto, parece pertinente levantar a hipótese de que poderá ser vantajoso apresentar situações mais abertas e que nunca tivessem sido parcialmente exploradas.

O entusiasmo crescente dos alunos pelas actividades de formulação de problemas está de acordo com os resultados obtidos por Moreira (1989). Assim, parece pertinente considerar que as actividades de formulação de problemas poderão contribuir para um maior envolvimento e entusiasmo dos alunos em relação ao trabalho.

Kilpatrick (1987), reflectindo sobre o que poderá ajudar os alunos a desenvolver a capacidade de formular problemas, destaca a importância do professor. No trabalho realizado, as professoras partiram dos enunciados apresentados pelos alunos e procuraram sempre aprofundar a experimentação de algumas ideias ou discutir aspectos ainda não explorados. Com base na observação das aulas, pode-se concluir que este trabalho ajudou bastante os alunos a progredirem no sentido de apresentarem enunciados mais criativos e em se envolverem na análise de várias questões e soluções.

A Calculadora

1. Pôde-se observar que a calculadora é um instrumento particularmente útil na resolução de problemas por uma abordagem de ensaio e erro sistemático e na identificação de padrões de distribuição numérica. De facto, como já foi referido, a calculadora oferece grandes possibilidades de testar muitos valores e relações permitindo obter um *feedback* imediato. No entanto, o facto da calculadora não permitir manter um registo do trabalho realizado, levantou algumas dificuldades em relação à apresentação da resolução de um problema por escrito.

2. Também foi possível observar a forma como a calculadora facilitou a persistência dos alunos na resolução de problemas. Aliviados do peso dos cálculos, os alunos "agarravam-se" à calculadora, não desistindo perante as tentativas frustradas.

3. Na formulação de problemas, a calculadora permitiu que os alunos analisassem mais rapidamente vários enunciados e soluções. Também incentivou os alunos a fazerem experiências e a persistirem na procura e análise de vários enunciados.

4. A utilização da calculadora facilitou uma certa autonomia de trabalho. Assim, alguns conteúdos, puderam ser facilmente trabalhados a partir das conclusões das actividades realizadas pelos alunos. Por outro lado, a calculadora foi um elemento importante no sentido de ajudar a que os alunos mais fracos participassem no trabalho.

5. Os alunos consideraram que a utilização da calculadora nas aulas de Matemática facilita a aprendizagem e entusiasma a

trabalhar. Para além da ajuda ao nível de facilitar os cálculos, vários alunos salientaram que a utilização da calculadora permite resolver um maior número de problemas e que facilita a concentração nos processos de raciocínio.

Vários autores consideram que a calculadora é um instrumento facilitador da resolução de problemas (Wheatley, 1980; Hembree e Dessart, 1986; Szetela e Super, 1987). Os resultados deste estudo, baseados na observação das aulas e nas respostas dos alunos ao questionário, confirmam esta ideia.

Reflectindo sobre os recursos e actividades que poderão facilitar o desenvolvimento da capacidade de formular problemas, Kilpatrick (1987) destaca a utilização do computador. Como refere, "os alunos podem usar o computador na alteração de dados de um problema e ver de que forma essas alterações afectam a solução. Com o computador podem gerar padrões numéricos que levem à formulação de conjecturas que podem testar e provar" (p. 139). Embora com algumas limitações relacionadas com a memorização e visualização de registos, pôde-se reconhecer estas potencialidades da calculadora nas actividades de formulação de problemas. Assim, sem que se pretenda questionar o computador como um precioso auxiliar no trabalho relacionado com a formulação de problemas, parece pertinente apontar a calculadora como um instrumento com várias potencialidades para a realização deste tipo de tarefa.

As implicações da utilização nas aulas de Matemática de um instrumento que proporciona grande facilidade de cálculo, é um aspecto bastante discutido. Embora vários autores considerem que esta questão está ultrapassada, pois muitos estudos evidenciaram claramente as vantagens da utilização da calculadora (Hembree e Dessart, 1986; Stezela e Super, 1987), a verdade é que ela continua a preocupar muitos professores. Ao longo desta experiência, para além dos aspectos discutidos anteriormente, puderam ser observadas outras vantagens da utilização da calculadora no ensino-aprendizagem da Matemática. Assim, a calculadora ajudou os alunos, sobretudo os mais fracos, a envolverem-se activamente no trabalho, facilitou a apresentação de propostas incentivando a investigação e a análise de situações em conteúdos com grande peso de aspectos rotineiros e contribuiu para que os alunos se apercebessem de que o trabalho em Matemática não se resume à prática de técnicas de cálculo.

O Trabalho de Grupo

1. No início da experiência os alunos tiveram muitas dificuldades em trabalhar em grupo: eram frequentemente agressivos para os seus colegas, discutiam ideias repetindo sempre a mesma coisa sem "ouvir" os comentários dos outros, não tentavam ultrapassar as dificuldades sem o auxílio das professoras. Ao longo da experiência, esta atitude foi-se modificando lentamente. De facto, os alunos conseguiram uma boa organização a este nível e era com visível prazer e entusiasmo que passaram a trabalhar em grupo.

2. O trabalho em grupo favoreceu a persistência dos alunos em relação à resolução de problemas. Perante as dificuldades que surgiam, ou seguiam algum caminho entretanto

sugerido por um colega, ou discutiam entre si que novas tentativas poderiam fazer. Assim, ao facilitar a procura de novos processos, o trabalho de grupo foi importante para que os alunos se tornassem mais persistentes na resolução de problemas.

3. Nas actividades de formulação de problemas este tipo de organização foi muito importante. O trabalho avançava a partir das observações feitas por algum aluno do grupo e das discussões e tentativas em que os seus elementos se envolviam.

4. O trabalho de grupo favoreceu uma maior participação e envolvimento dos alunos mais fracos.

5. Apesar da crescente participação de todos os alunos, o problema da relativa passividade de alguns nunca foi totalmente ultrapassado.

6. A grande maioria dos alunos gostou de trabalhar em grupo. Na sua opinião, este tipo de trabalho ajudou a ultrapassar as dificuldades que surgiram e a perceber várias maneiras de pensar. Alguns alunos chegaram mesmo a afirmar que quando trabalhavam em grupo resolviam sempre correctamente as questões. Só quatro alunos, ao referirem que nem sempre todos trabalhavam e que se estabelecia alguma confusão com todos a falar ao mesmo tempo, colocaram algumas reservas a este tipo de trabalho.

De uma forma geral estas conclusões estão de acordo com as que Davidson e Kroll (1991) identificam em estudos bastante recentes. O trabalho de grupo proporciona aos alunos um maior envolvimento nas actividades e favorece uma atitude de maior confiança nas suas capacidades.

Também o facto do trabalho em grupo favorecer alguns aspectos relacionados com o desenvolvimento da capacidade de resolução e formulação de problemas está de acordo com a opinião de vários autores (Lester, 1980; Kilpatrick, 1987; Mason, 1991).

Comentário Geral

As conclusões anteriores, sistematizadas segundo as grandes questões do estudo, encontram-se intimamente relacionadas. De facto, a relação entre os vários aspectos a que se deu ênfase no trabalho com os alunos, é destacada por vários autores. Assim, o ambiente que se estabelece na sala de aula é considerado como um dos aspectos a ter em conta no sentido de melhorar a capacidade de resolver e formular problemas (Lester, 1980; Kilpatrick, 1987; Mason, 1991). O trabalho em pequenos grupos é também frequentemente apontado como facilitador do desenvolvimento da capacidade de resolução de problemas (Lester, 1980; Schoenfeld, 1992). Também várias investigações realçam a relação positiva entre a utilização da calculadora e a resolução de problemas (Wheatley, 1980; Szetela e Super, 1987).

A evolução dos alunos ao longo da experiência reflectiu a profunda relação entre todos estes aspectos. De facto, se é inegável que o trabalho em grupo, a utilização da calculadora e o trabalho realizado em torno da resolução e formulação de problemas foram extremamente importantes *per si*, da observação realizada pôde-se inferir que a principal força da experiência desenvolvida com os alunos, residiu em que todos estes elementos contribuiram para que os alunos tivessem um interesse e envolvimento crescente pelo trabalho que realizavam. Os alunos foram progressivamente acreditando nas suas capacidades e sentindo-se responsáveis pela forma como decorria o trabalho na aula. De facto, com base nas observações feitas e nas respostas dos alunos ao questionário, pôde-se concluir que houve uma mudança de atitude dos alunos em relação à Matemática. Assim, ao longo da primeira parte da experiência, várias foram as ocasiões em que se pôde perceber que para os alunos os aspectos de cálculo eram os mais importantes na Matemática, que a organização do trabalho ao nível da sala de aula envolvia o professor a explicar a matéria e os alunos a exercitarem algumas técnicas, que na resolução de um problema bastaria a "descoberta" de uma sequência de cálculos e que em Matemática havia *um* processo e *uma* solução para cada questão. Mas, com o evoluir do trabalho, foi visível que os alunos assumiam uma atitude de independência em relação às professoras na realização do trabalho, que cada vez mais tentavam diferentes processos de resolução e analisavam diferentes soluções e que preferiam as aulas em que podiam trabalhar em pequenos grupos. Nas respostas ao questionário, muitos alunos realçaram que aprenderam a *saber pensar*.

As professoras foram um elemento central nesta mudança de atitude. Não desanimaram perante a lentidão deste processo, dedicando todas as semanas várias horas para reflectir sobre o trabalho realizado e sobre as estratégias que pareciam mais adequadas ao seu desenvolvimento.

O factor tempo foi um obstáculo para que vários aspectos relacionados com a resolução e formulação de problemas fossem trabalhados com maior profundidade, na medida em que não se queria perder de vista o cumprimento do programa curricular.

Embora reconhecendo que o trabalho desenvolvido pelas professoras na realização da experiência exigiu mais tempo, preparação e reflexão do que o habitual, os materiais utilizados e as opções metodológicas seguidas podem considerar-se bastante viáveis neste nível de ensino.

Estes alunos vêem de forma diferente a Matemática e envolveram-se com visível interesse na resolução de actividades ligadas aos conteúdos escolares. Assim, tudo indica que a exploração de situações problemáticas, a resolução de problemas e a utilização da calculadora podem contribuir para que os alunos vivam duma forma intensa e significativa a experiência matemática.

Recomendações

Este estudo decorreu no contexto de uma experiência de ensino-aprendizagem da Matemática integrada na realidade da prática escolar. Esta opção radica na importância que se atribui à análise das questões colocadas pela concretização das novas orientações curriculares em ambientes reais de sala de aula.

Esta opção condiciona, contudo, o número de experiências que se podem proporcionar aos alunos em torno da resolução e formulação de problemas uma vez que é necessário não perder de vista o cumprimento do programa curricular. Esta limitação, inerente a uma experiência situada no contexto da sala de aula, torna pertinente a recomendação de que futuras investigações procurem estudar a evolução dos alunos ao longo de períodos de tempo mais prolongados.

Foram sentidas particulares dificuldades por parte dos alunos ao nível da resolução individual de problemas e da formulação de problemas. Recomenda-se que em futuras investigações se dê mais atenção a estes aspectos. Que peso atribuir ao trabalho em grupo e ao individual nas actividades de resolução de problemas? Que questões colocam os alunos acerca de uma situação problemática que não é objecto de qualquer exploração prévia? Que relações existirão entre as capacidades de resolver e de formular problemas?

As atitudes e concepções dos alunos envolvidos em experiências deste tipo são também um aspecto que parece do maior interesse aprofundar. A forma como os alunos encaram a Matemática e a sua aprendizagem de que modo se reflecte na resolução e formulação de problemas? Qual o efeito do envolvimento em experiências deste tipo nas suas concepções e no seu percurso enquanto alunos?

Este estudo centrou-se na forma particular como os alunos viveram esta experiência de trabalho. Parece-nos igualmente pertinente que se analise a vivência dos professores que participam em experiências com características idênticas à realizada. Como encaram o seu próprio percurso? Que mudanças evidenciam ao nível das concepções e atitudes face ao ensino-aprendizagem da Matemática?

Finalmente, é de destacar o enriquecimento que o trabalho realizado constituiu para a autora deste estudo. De facto, a experiência vivida confirma a importância de realizar investigações na área da resolução de problemas no contexto de projectos desenvolvidos em equipa por investigadores e professores, abordagem que igualmente se recomenda que seja prosseguida em futuros estudos.

BIBLIOGRAFIA

Abrantes, P. (1990). Resolução de Problemas e Educação Matemática: Alguns Aspectos da Experiência Portuguesa. In *Memorias do I-CIBEM*, Sevilha.

APM (1988). *Renovação do Currículo de Matemática*. Lisboa: APM.

APM (1991). *Avaliação: Uma Questão a Enfrentar* (Actas do seminário sobre avaliação). Lisboa: APM.

Bell, A., Costello, J. e Kuchemann, D. (1983). *Research on Learning and Teaching*. Oxford: Nelson Publishing.

Bogdan, R. e Biklen, S. (1982). *Qualitative Research for Education: An Introduction to Theory and Methoods*. Boston: Allyn and Bacon.

Borasi, R. (1986). On the Nature of Problems. *Educational Studies in Mathematics*, 17, 2, 125-141.

Bossert, S. (1989). Cooperative Activities in the Classroom. *Review of Research in Education*, 15, 225-250.

Brown, S. e Walter, M. (1990). *The Art of Problem Posing*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Carvalho, R. (1990). *Resultados de um Inquérito Realizado a Professores do 1º Ciclo do Ensino Básico*. Manuscrito não publicado, Escola Superior de Educação de Setúbal.

Charles, R. e Lester, F. (1984). An Evaluation of a Process-Oriented Instructional Program in Mathematical Problem Solving in Grades 5 and 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 1, 15-34.

Charles, R., Lester, F. e O'Daffer, P. (1987). *How to Evaluate Progress in Problem Solving*. Reston: NCTM.

Cockroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts*. London: Her Magesty's Stationery Office.

Davidson, N. e Kroll, D. (1991). An Overview of Research on Cooperative Learning Related to Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 5, 362-365.

DGEBS (1990). *Programa do 1º Ciclo*. Ensino Básico, 1º Ciclo. Lisboa: ME.

DGEBS (1991a). *Programa de Matemática: Plano de Organização do Ensino Aprendizagem*. Vol II, Ensino Básico, 2º Ciclo. Lisboa: ME.

DGEBS (1991b). *Programa de Matemática: Plano de Organização do Ensino Aprendizagem. Vol II*, Ensino Básico, 3º Ciclo. Lisboa: ME.

Fernandes, D. (1988). *Comparison of the Effects of Two Models of Instruction on the Problem-Solving Performance of Preservice Elementary School Teachers and on their Awareness of the Problem-Solving Strategies they Employ* (Dissertação de doutoramento). Texas A&M University, College Station, Texas.

Fernandes, D. (1992). Resolução de Problemas: Investigação, Ensino, Avaliação e Formação de Professores. In *Educação Matemática*. Colecção Temas de Investigação. Lisboa: IIE.

Franco, A. e Teixeira, A. (1987). *Atitudes dos Professores Face à Resolução de Problemas*. Lisboa: APM.

Good, T., Mulryan, C. e McCaslin, M. (1992). Grouping for Instruction in Mathematics: A Call for Programmatic Research on Small-Group Processes. In A. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.

Hatfield, L. (1978). Heuristical Emphases in the Instruction of Mathematical Problem Solving: Rationales and Research. In L. Hatfield e D. Bradbard (Eds.), *Mathematical Problem Solving*. Columbus: ERIC Clearinghouse for Science, Mathematics and Environmental Education.

Hembree, R. e Dessart, D. (1986). Effects of Hand-held Calculators in Precollege Mathematics Education: A Meta-Analysis. *Journal for Research in Mathematics Education*, 17, 2, 83-99.

ICMI (1986). *School Mathematics in the 1990s*. London: Cambridge University Press.

Kantowski, M. (1977). Processes Involved in Mathematical Problem Solving. *Journal for Research in Mathematics Education*, 8, 3, 163-180.

Kilpatrick, J. (1987). Problem Formulating: Were Do Good Problems Came From? In A. Schoenfeld (Ed.), *Cognitive Science and Mathematics Education*. Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates.

Kilpatrick, J. (1992) Some Issues in the Assessment of Methematical Problem Solving. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice*. Berlim: Springer-Verlag.

Lange Jzn, J. (1987). *Mathematics, Insight and Meaning*. Ultrecht: OW & OC.

Lester, F. e Charles, R. (1992). A Framework for Research on Problem-Solving Instruction. In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice*. Berlim: Springer-Verlag.

Lester, F. (1980). Problem Solving: Is it a Problem? In M. Linquist (Ed.), *Selected Issues in Mathematcs Education*. Reston: NCTM.

Lester, F. (1983). Trends and Issues in Mathematical Problem Solving Research. In R. Lesh e M. Landau (Eds.), *Acquisition of Mathematics Concepts and Processes*. New York: Academic Press.

Loureiro, M. C. (1991). *Calculadoras na Educação Matemática: Uma Experiência de Formação de Professores* (Tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Ludke, M. e André, M. (1986). *Pesquisa em Educação: Abordagens Qualitativas*. São Paulo: EPU.

Mason, J. (1991). Mathematical Problem Solving: Open, Closed and Exploraty in the UK, *ZDM*, 91/1, 14-19.

Moreira, L. (1989). *A Folha de Cálculo na Educação Matemática.* Lisboa: Projecto Minerva, DEFCUL.

NCSM (1978). Position Statements on Basic Skills. *Mathematics Teacher*, 71, 147-152.

NCTM (1980). *An Agenda for Action*. Reston: NCTM.

NCTM (1989). *Curriculum and Evaluation Standards for School Mathematics*. Reston: NCTM.

NRC (1990). *Everybody Counts: A Report on the Future of Mathematics Education*. Washington: National Academy Press.

Patton, M. (1987). *How to Use Qualitative Methods In Evaluation.* California: Sage Publications.

Pehkonen, E. (1991a). Problem Solving in Mathematics, *ZDM*, 91/1, 1-4.

Pehkonen, E. (1991b). Developments in the Understanding of Problem Solving, *ZDM* , 91/2, 46-50.

Pólya, G. (1977). *A Arte de Resolver Problemas*. Rio de Janeiro: Interciência.

Pólya, G. (1981). *Mathematical Discovery* (combined edition). New York: Wiley.

Ponte, J. e Abrantes, P. (1982). Os Problemas e o Ensino da Matemática. In *O Ensino da Matemática Anos 80*. Lisboa: SPM.

Ponte, J. (1989). A Calculadora e o Processo de Ensino-Aprendizagem. *Educação e Matemática*, 11, p. 1-2.

Ponte, J. (1991a). Resolução de Problemas: da Matemática às Aplicações. In *Actas do 2º Encontro Nacional de Didácticas e Metodologias de Ensino*, Aveiro.

Ponte, J. (1991b). *Problemas de Matemática e Situações da Vida Real*. Manuscrito não publicado, Universidade de Lisboa.

Reys, B. (1989). The Calculator as a Tool for Instruction and Learning: New Directions for Elementary School Mathematics. In *Yearbook NCTM*. Reston: NCTM.

Romberg, T. (1984). *School Mathematics: Options for the 1990s*. Washington, DC: U.S. Department of Education.

Saraiva, M. (1991). *O Computador na Aprendizagem da Geometria: Uma Experiência com Alunos do 10º Ano de Escolaridade* (Tese de Mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical Problem Solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognition, and Sense Making in Mathematics. In D. Grouws (Ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teatching and Learning*. Reston: NCTM.

Schwartz, J. (1992). Can We Solve the Problem Solving Problem Without Posing the Problem Posing Problem? In J. Ponte, J. F. Matos, J. M. Matos e D. Fernandes (Eds.), *Mathematical Problem Solving and New Information Technologies: Research in Contexts of Practice*. Berlim: Springer-Verlag.

Silva, A. (1991). *A Calculadora no Percurso de Formação de Professores de Matemática* (Tese de mestrado). Lisboa: DEFCUL.

Silver, E. e Kilpatrick, J. (1989). Testing Mathematical Problem Solving. In R. Charles e E. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston: NCTM.

Stacey, K. (1991). Linking Application and Acquisition of Mathematical Ideas through Problem Solving, *ZDM*, 91/1, 8-14.

Stanic, G. e Kilpatrick, J. (1989). Historical Perspectives on Problem Solving in Mathematics Curriculum. In R. Charles e E. Silver (Eds.), *The Teaching and Assessing of Mathematical Problem Solving*. Reston: NCTM.

Suydam, M. (1980). Hand-Held Calculators in Shcools: Paper and Report from the Working Group. In H. Steiner (Ed), *Comparative Studies of Mathematics - Curricula Change and*

Stability 1960-1980. Bielefeld: Institut fur Didaktic der Mathematik der Universitat Bielefeld.

Szetela, W. e Super, D. (1987). Calculators and Instruction in Problem Solving in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18, 3, 215-229.

Veloso, M. G. (1991). *Novas Tecnologias de Informação: Um Programa de Formação de Professores de Matemática* (Tese de mestrado). Lisboa:DEFCUL.

Webb, N. (1991). Task-Related Verbal Interaction and Mathematics Learning in Small Groups. *Journal for Research in Mathematics Education*, 22, 5, 366-389.

Wheatley, C. (1980). Calculator Use and Problem-Solving Performance. *Journal for Research in Mathematics Education*, 11, 5, 323-333.

Anexo 1

Fichas de Trabalho

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 1

O quadrado dos 100 ...

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

1. Constrói uma tabela como a da figura ao lado, tendo como base um quadrado com 45 quadrículas de lado.

2. Recorta a tabela, cola-a numa folha de cartolina e plastifica-a.

Utilizando a tabela que construíste, resolve as seguintes actividades:

3. Calcula a soma das primeiras quatro linhas da tabela. O que observas nos resultados que obtiveste? Explica porque é que isso acontece.

4. Sem fazeres cálculos, indica a soma das seis linhas seguintes.

5. Confirma com a calculadora os resultados que obtiveste na alínea anterior.

6. Repete o que fizeste nas alíneas 3, 4 e 5 mas, agora, para as colunas da tabela.

7. Calcula a soma de:

- todas as linhas
- todas as colunas

8. Explica a relação que encontraste entre as duas somas anteriores.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO

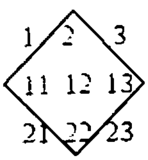
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 2

Mais quadrados —

No teu cartão dos 100 números considera quadrados do tipo do assinalado na figura ao lado. A este quadrado chamamos o quadrado do 12 porque este é o seu centro.



1. Desenha o quadrado do 34. Qual é a média dos 4 números que são vértices deste quadrado?

2. Desenha mais quatro quadrados deste tipo e determina a média dos respectivos vértices.

3. Desenha um quadrado cuja soma dos vértices seja 260. Qual é o número que está no centro do quadrado?

Chamando soma do quadrado à soma dos vértices do quadrado, responde às seguintes questões:

4. É possível dois quadrados distintos terem a mesma soma? Porquê?

5. É possível encontrar um quadrado cuja soma seja 185? E 149?

6. Que características apresentam a soma e o centro destes quadrados? Como justificas que isto aconteça?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 3

À descoberta dos primos

Sabias que...

Eratóstenes foi um astrónomo e geógrafo grego que viveu entre 276 e 194 antes de Cristo. Com meios forçosamente deficientes conseguiu, a partir de medições simultâneas das inclinações dos raios solares em dois locais diferentes (Siena e Alexandria) determinar o diâmetro da Terra, tendo chegado a um resultado que difere do verdadeiro em apenas 100 km. Foi ainda conhecido pelo processo de determinação dos números primos que é, por isso, chamado "Crivo de Eratóstenes".

1. Constrói um "Crivo de Eratóstenes" no teu cartão dos 100 números:

- elimina o número 1;
- elimina todos os múltiplos de 2, excepto o 2;
- elimina todos os múltiplos de 3, excepto o 3;
- elimina todos os múltiplos de 5, excepto o 5;
- elimina todos os múltiplos de 7, excepto o 7.

Os números que não foram eliminados são os números primos menores que 100.

2. Tenta encontrar uma definição de:

- número primo;
- múltiplo de um número;
- divisor de um número.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 4

A propósito de múltiplos e divisores

1. Determina o primeiro múltiplo de 9 que é maior que 34.

2. 80 é múltiplo de 16. Porquê?

3. Se um número é múltiplo de 21, podes indicar outro número do qual ele seja múltiplo?

4. Determina a de modo que o número 12a5 seja divisível por 3.

5. Escreve os divisores de 18, 12 e 6. Estes números têm divisores comuns? Quais? Qual é o maior divisor comum?

6. Escreve os primeiros dez múltiplos de 4 com três algarismos.

a) Tenta descobrir um critério para ver se um número é divisível por 4.

b) Utilizando o critério que descobriste averigua se o número 43215 é divisível por 4.

c) Confirma, com a tua calculadora, a conclusão a que chegaste.

7. Qual é o maior múltiplo de 6 com cinco algarismos?

8. Pensa em três números inteiros consecutivos. Calacula a sua soma. A soma é divisível por 3? Tenta justificar.

9. Num desfile para um corso de Carnaval, a Escola de Samba "Os Baianos" verificou que se os elementos da Escola se dispusessem em filas de 4 , em filas de 3 ou em filas de dois, sobrava <u>sempre</u> <u>um</u> <u>único</u> <u>elemento</u> na última fila. Mas, se formassem em filas com 5 elementos, todas as filas ficavam completas.
Quantos elementos tinha a Escola de Samba "Os Baianos"?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 5

Decomposições e mais decomposições

1. Considera o número 210.

Escreve-o como um produto de dois factores.

Escreve-o como um produto de três factores.

Escreve-o como produto de um número máximo de factores. Que observas?

2. Decompõe em factores primos os números: 45 , 127 e 314.

3. Sabe-se que $24 = 2^3 \times 3$ e que $32 = 2^5$. Qual é a decomposição do produto 24×32?

4. Sabendo que $24 = 2^3 \times 3$, qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 24, para se obter um número divisível por 5?

5. A decomposição de 120 em factores primos é $2^3 \times 3 \times 5$. Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar 120 para resultar um número divisível por 21?

6. Três números, que se representam por A, B e C, têm as seguintes decomposições em factores primos:

$A = 2^2 \times 3^2$ $\quad$ $B = 2 \times 3^2$ $\quad$ $C = 2 \times 3^3 \times 5$

a) Qual destes números admite o divisor 10? Porquê?

b) C é divisível por 9? Qual é o quociente?

c) Quais são os divisores comuns a A, B e C?

7. O António anda muito intrigado. Diz ele:

"Se um número é divisível por 2 e por 3, então é divisível por 6. Mas se um número é divisível por 2 e por 4, pode não ser divisível por 8. Porque será?"

Tenta encontrar uma explicação para o problema do António.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

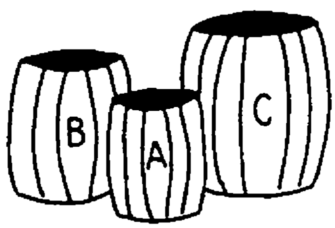
7º ANO - 1991/1992

FICHA 6

Às voltas com mais problemas

1. Qual é a capacidade, em litros, da maior vasilha que pode encher, completamente, qualquer uma destas três pipas?

A	B	C
14	28	63
36	60	254
90	126	240



2. Três carreiras de autocarros partem da Avenida de Sapadores. Os autocarros da primeira carreira partem de 18 em 18 minutos; os da segunda, de 20 em 20 minutos e os da terceira, de 60 em 60 minutos. Às 8h20m deu-se a partida simultânea das três carreiras, a que horas voltaram as carreiras a partir simultaneamente?

3. Dois baldes têm, respectivamente, uma capacidade de 12 litros e 15 litros. Qual é o menor volume de água que pode ser medido exactamente por qualquer um deles?

4. O João só tem moedas de 20$00 e a Marta só tem moedas de 50$00. Sabemos que foram ambos às compras e que gastaram exactamente o mesmo. Qual foi o valor mínimo que o João e a Marta podem ter gasto?

5. Uma folha de cartolina rectangular tem 54cm por 45cm. A Maria quer dividi-la em quadrados iguais, aproveitando toda a cartolina.
Quanto devem medir os lados dos quadrados para que estes sejam os maiores possíveis? Em quantos quadrados vai ela dividir a folha?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 7

À volta do Trinca Espinhas...

1. Quando trabalhaste com o Trinca-Espinhas pudeste consultar as instruções. Imagina, agora, que queres contar a um amigo teu como funciona este programa. Descreve num pequeno texto as informações que lhe davas. Não te esqueças de lhe dizer:

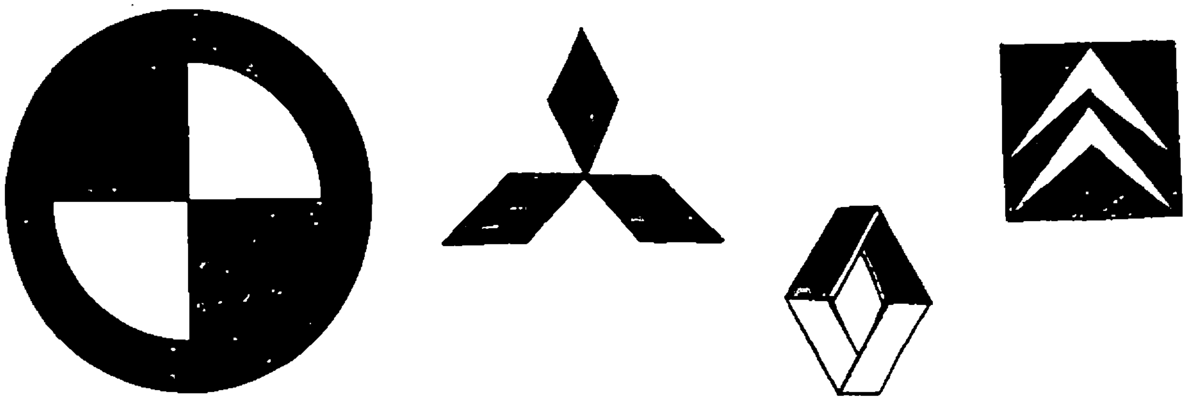
- De que trata o jogo.
- Como começa o jogo.
- O que faz o Trinca-Espinhas cada vez que se escolhe um número.
- Quando e como acaba o jogo.
- Quem ganha o jogo.

2. Se o teu amigo te perguntasse qual a melhor forma de ganhar ao Trinca-Espinhas que sugestões lhe davas?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 8

Simetrias e mais simetrias...

1. Com o auxílio do Mira determina os eixos de simetria das seguintes figuras:



2. Desenha figuras que tenham:

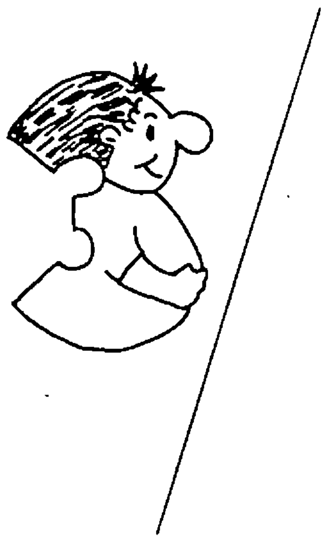
a) três e só três eixos de simetria.

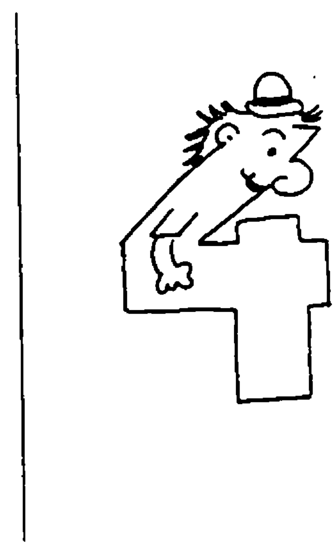
b) mais de três eixos de simetria.

c) nenhum eixo de simetria.

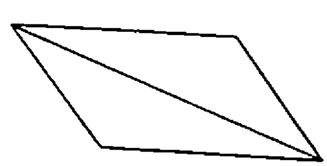
3. Usando o Mira descobre os eixos de simetria:

4. Desenha as imagens simétricas das figuras a seguir indicadas:





5. A partir da seguinte figura e usando simetrias sucessivas desenha um motivo geométrico e decora-o à tua escolha.



ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 9

Construir figuras a partir do Tangran

1. Descobre diversas formas geométricas utilizando as peças do Tangran. Regista-as no papel quadriculado.

2. Com duas peças constrói

TRIÂNGULO PARALELOGRAMO QUADRADO TRAPÉZIO

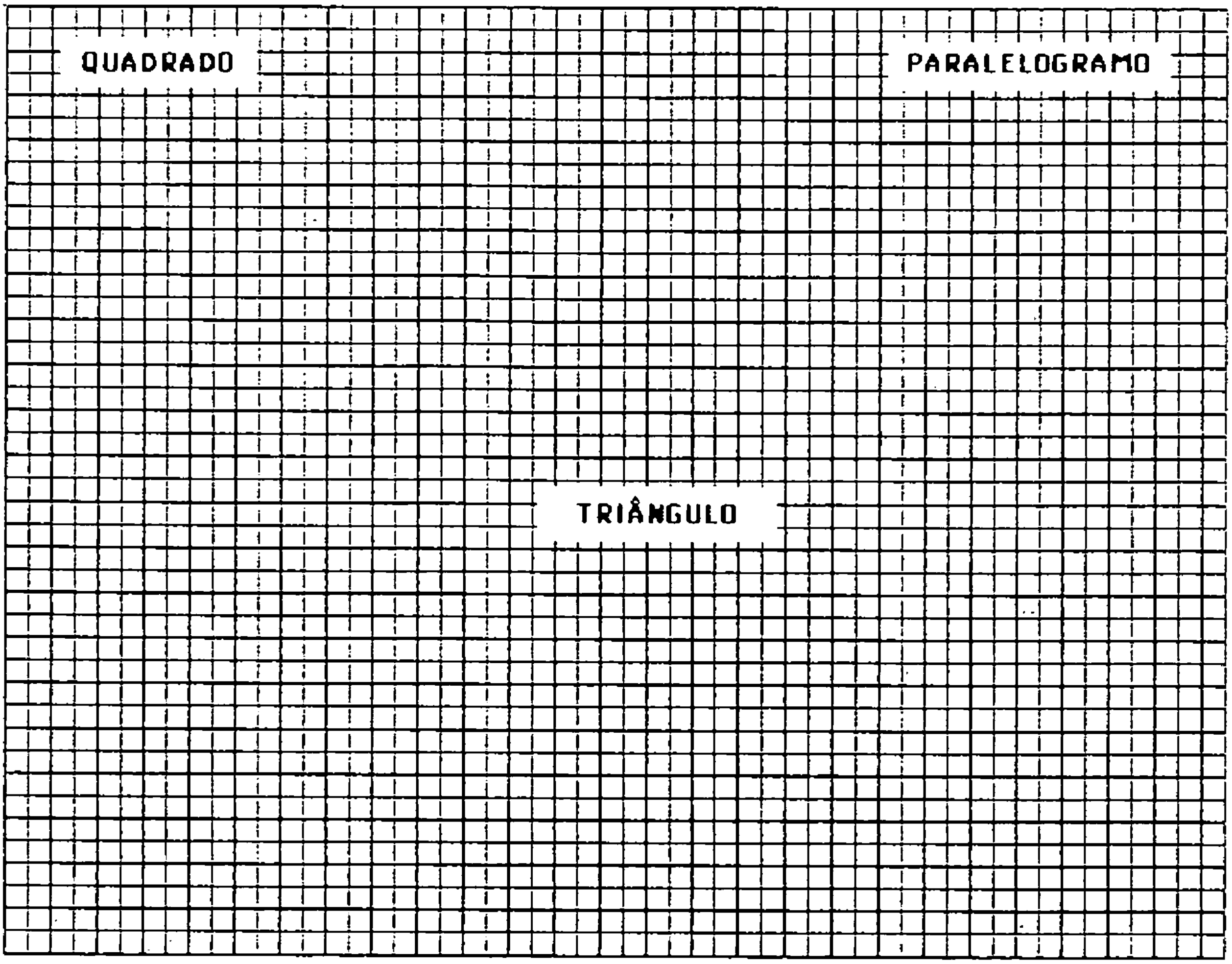
3. Com três peças constrói

TRIÂNGULO PARALELOGRAMO QUADRADO TRAPÉZIO

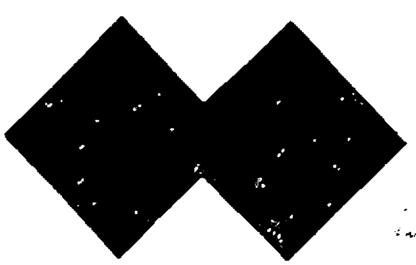
4. Com quatro peças constrói

QUADRADO TRIÂNGULO RECTÂNGULO

5. Com sete peças constrói



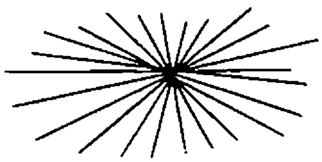
6. Experimenta, agora, fazer



ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 10

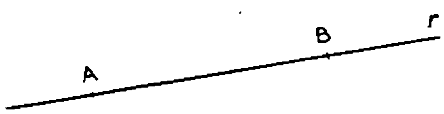
Rectas, semi-rectas e segmentos de recta

Uma recta é um conjunto infinito de pontos.



Por um ponto passa um número infinito de rectas.

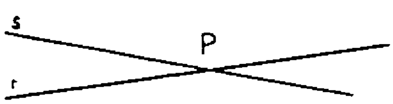
Podemos utilizar uma letra minúscula para identificar uma recta. Como por dois pontos passa apenas uma recta, também a poderemos identificar por dois dos seus pontos.



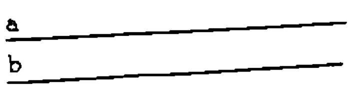
Pelos pontos A e B passa apenas a recta r. Tanto r como AB representam a mesma recta.

1. Desenha no teu caderno, três pontos não colineares, ou seja, três pontos que não estejam sobre a mesma recta. Quantas rectas distintas podes traçar, unindo-os dois a dois?

Num plano, duas rectas dizem-se concorrentes quando têm em comum um único ponto e dizem-se paralelas quando não têm pontos em comum.



$s \cap r = \{P\}$ s e r são concorrentes no ponto P.



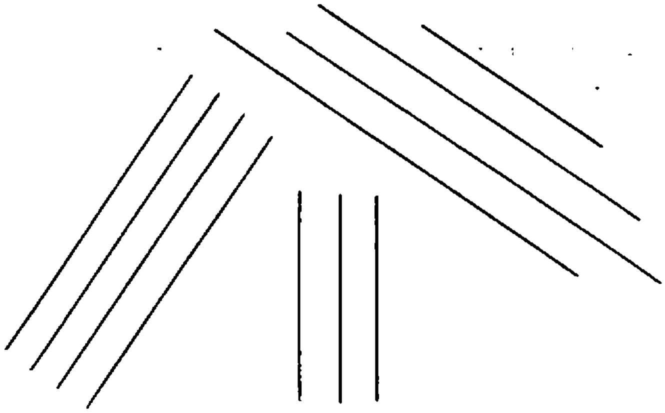
$a \cap b = \emptyset$ a e b são paralelas.

2. Desenha três rectas p, q e r tais que:

a) $p \cap q = \emptyset$ e $q \cap r = \emptyset$. Qual é a posição relativa destas rectas?

b) $p \cap q = \{P\}$ e $q \cap r = \{P\}$. Qual é a posição relativa destas rectas?

Rectas paralelas têm a mesma direcção.



Como em cada grupo, as rectas são paralelas entre si, estão representadas, na figura ao lado, onze rectas mas apenas três direcções.

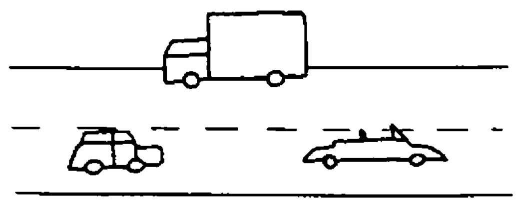
Em cada direcção podemos considerar dois sentidos, que estão representados, na figura, pelas setas.

3. Baseando-te na figura ao lado, diz se são verdadeiras ou falsas, as afirmações seguintes:

a) A, B e C viajam na mesma direcção.

b) A, B e C viajam no mesmo sentido.

c) A e C viajam em sentidos opostos



Qualquer ponto de uma recta define sobre ela duas semi-rectas opostas.

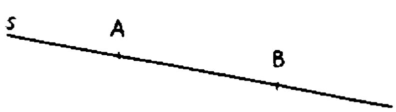
O ponto P define na recta r as semi-rectas PA e PB.

PA representa a semi-recta de origem P e que passa por A.

PB representa a semi-recta de origem P e que passa por B.

4. Marca, no teu caderno, um ponto V. A partir desse ponto, desenha duas semi-rectas com direcções diferentes. O que obtiveste?

Dois pontos não coincidentes definem numa recta um segmento de recta.



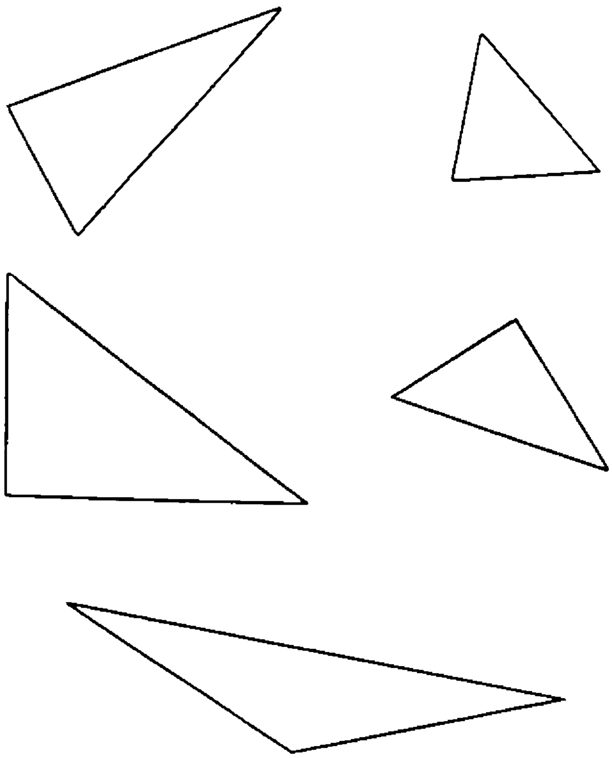
Os pontos A e B definen, na recta s, o segmento de extremos A e B, que se representa por [AB].

O comprimento do segmento de recta [AB] representa-se por $\overline{AB}$.

5. Desenha um segmento de recta [PQ] tal que $\overline{PQ} = 10$ cm.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 11

A propósito de triângulos...



Nós humildes acutângulos
Não temos nada invulgar
Mas, quem desenha um triângulo
Sem querer, faz um de nós,
por ser o mais popular.

Dos triângulos somos nós,
Os rectângulos, reis da fama.
Se não estamos direitinhos,
Às vezes nem nos conhecem,
Já muita gente se engana.

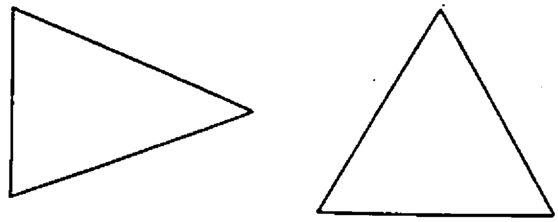
É obtuso. Pois é!
Isso não nos torna maus!
Na família obtusângulo
O orgulho é ter um ângulo
Com mais de noventa graus.

1. Com um transferidor mede todos os ângulos de cada um dos triângulos desenhados acima.

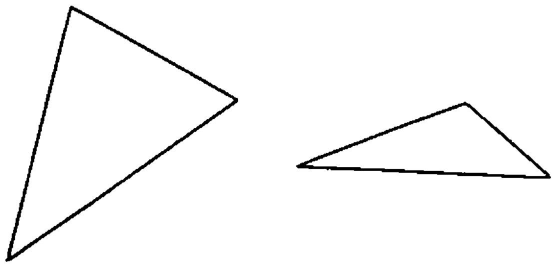
2. Preenche, agora os espaços em branco, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

- Um triângulo **acutângulo** é um triângulo que tem ....
- Um triângulo **rectângulo** é um triângulo que tem ....
- Um triângulo **obtusângulo** é um triângulo que tem ....

3. Constrói um triângulo acutângulo, um triângulo rectângulo e um triângulo obtusângulo.



Nos isósceles aprumados
Tudo está arrumadinho
Sempre dois lados iguais.
O equilátero então,
"O maior" na arrumação,
Tudo igual. Já é demais!

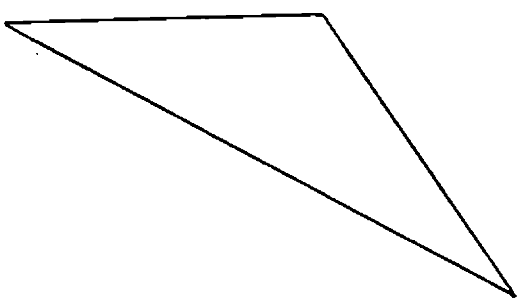


Os escalenos, coitados!
Parecem uns desgraçados,
porque será afinal?
É que três lados diferentes
Tornam-nos uns descontentes
Por não terem um igual.

6. Com uma régua, mede os lados de todos os triângulos desenhados acima.

7. Completa os espaços em branco, de modo a obteres afirmações verdadeiras:

- Um triângulo isósceles é um triângulo que tem .... Se tiver .... chama-se equilátero.
- Um triângulo escaleno é um triângulo que tem ....



E agora são vocês.
Vejam se já são capazes.
Quero que me classifiquem.
No meu ângulo tenho orgulho.
Também sou dos arrumados.
Portanto sou um triângulo
Quanto aos ângulos ....
E .... quanto aos lados.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 12

Mais sobre triângulos –

1. a) Com as palhinhas, tenta construir um triângulo de lados 3 cm, 5 cm e 9 cm.
b) Explica o que aconteceu.

2. a) Corta 1 cm à palhinha maior e experimenta agora construir um triângulo de lados 3 cm, 5 cm e 8 cm.
b) Explica novamente o que aconteceu.

3. a) Corta mais 1 cm à palhinha maior e constrói o triângulo de lados 3 cm, 5 cm e 7 cm.
b) O que podes concluir?

4. Completa o espaço em branco de modo a obteres uma afirmação verdadeira:
Num triângulo, qualquer lado é .... qua a soma dos outros dois.
Esta propriedade característica dos triângulos chama-se **desigualdade triangular.**

5. Será possível construir um triângulo de lados:
a) 5 cm , 10 cm e 4 cm ?
b) 3 dm , 75 cm e 5 dm ?
c) 3 m , 27 dm e 600 cm ?
d) 4 m , 5 m e 9 m ?

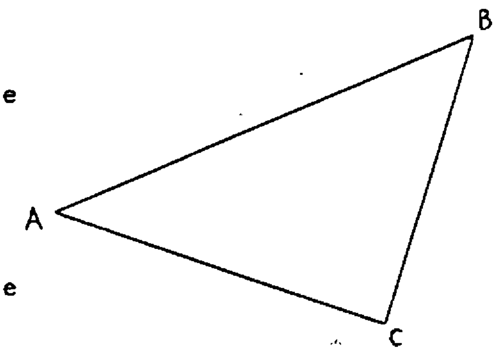
6. Sabendo que num triângulo dois dos lados medem 4 cm e 8 cm , indica o maior número inteiro que pode exprimir, em centímetros, a medida do terceiro lado.

7. Indica três números inteiros que possam exprimir as medidas de um triângulo:
a) isósceles
b) escaleno

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 13

Relações entre lados e ângulos de um triângulo

1. Considera o triângulo [ABC] da figura ao lado.



a) Com uma régua, mede os lados de [ABC] e preenche os espaços em branco:

$\overline{AB}$ = ... $\overline{AC}$ = ... $\overline{BC}$ = ...

b) Com um transferidor, mede os ângulos de [ABC] e preenche os espaços em branco:

$A\hat{C}B$ = ... $A\hat{B}C$ = ... $B\hat{A}C$ = ...

c) Compara as medidas dos lados com as medidas dos ângulos de [ABC] e completa a seguinte afirmação:

Num triângulo, ao maior lado opõe-se o .... ângulo e, do mesmo modo, ao maior ângulo opõe-se o .... lado.

2. a) Constrói um triângulo isósceles. Mede os ângulos desse triângulo. O que podes concluir?

b) Completa, então, a seguinte afirmação:

Num triângulo, a ângulos iguais opõem-se lados .... e, do mesmo modo, a lados iguais opõem-se ângulos ....

3. Num triângulo [PQR] tem-se: $\overline{MP}$ = 3 cm , $\overline{MN}$ = 5 cm e $\overline{PN}$ = 4 cm . Qual é o menor ângulo de [PQR] ? E o maior?

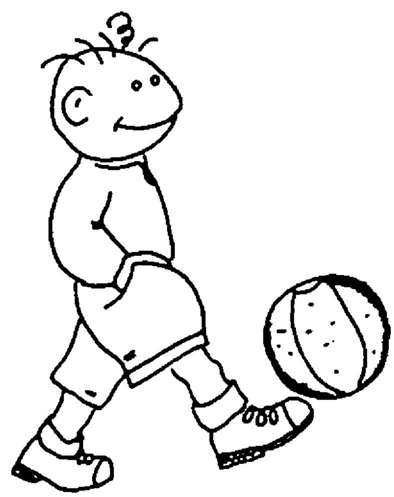
4. Que relação existe entre os ângulos internos de um triângulo equilátero? Justifica a tua resposta.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/92
FICHA 14

Às voltas com o futebol...

1. Observa a tabela que representa a classificação dos clubes da I divisão de futebol.

Nº	Clube	Pontos	Golos marcados	Golos sofridos
1	Porto	24	20	1
2	Benfica	24	26	10
3	Guimarães	21	25	17
4	Sporting	21	23	10
5	Boavista	20	17	12
6	Chaves	16	17	17
7	Estoril	16	14	15
8	Beira-Mar	16	13	14
9	Marítimo	15	14	15
10	Gil Vicente	15	10	12
11	Farense	14	16	18
12	Penafiel	13	11	18
13	Famalicão	13	14	24
14	Salgueiros	13	11	17
15	Braga	12	15	21
16	Paços Ferreira	12	13	19
17	União Madeira	11	10	23
18	Torreense	10	16	22



a) Apresenta uma hipótese dos resultados obtidos pelo Farense em cada um dos 15 jogos que já realizou.

b) Adiciona a coluna dos golos marcados e a coluna dos golos sofridos. Como explicas a relação que encontraste nas duas somas?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 15

Testes e mais testes...

1. Classifica o teste do Pedro, sabendo que cada resposta certa vale 10 pontos e cada resposta errada desconta 7 pontos.

Teste de Matemática

Nome ....Pedro Miguel Antunes.... Classificação ....

Indica se é verdadeira (V) ou falsa (F) cada uma das afirmações seguintes:

1.	*O maior múltiplo de* 7 *menor que* 40 *é* 35.	V
2.	*O simétrico de* -13 *é* +13.	F
3.	$2^3 = 6$	V
4.	$-7 > -5$	F
5.	$m.m.c.\ (5, 8) = 35$	F
6.	*Um triângulo equilátero é acutângulo.*	F
7.	30°, 50° *e* 90° *podem ser as amplitudes dos ângulos internos de um triângulo rectângulo.*	F
8.	$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} = \frac{23}{20}$	V
9.	$2 + 3 \times 2 = 10$	V
10.	$-130 + 100 + 130 = 100$	V

2. No mesmo teste o António obteve 49 pontos. Quantas questões acertou?

3. Ainda no mesmo teste, a Ana só respondeu a 6 questões e obteve 26 pontos. Quantas questões errou?

4. A Mafalda também resolveu este teste. Inventa um problema que possa traduzir o que aconteceu à Mafalda. Resolve o problema que inventaste.

c) Chama-se "goal average" à diferença entre os golos marcados e os golos sofridos por cada equipa. Por exemplo, o "goal average" do Porto é 19 e o do Gil Vicente é -2. Calcula o "goal average" de todas as restantes equipas.

d) Coloca as equipas por ordem decrescente segundo o "goal average" de cada uma.

2. Imagina que estás a organizar um torneio de futebol entre quatro turmas do 7º ano de tal modo que cada turma jogue uma vez com cada uma das restantes.

a) Quantos jogos terias que organizar?

b) Agora tens que escrever um artigo sobre o torneio, para o jornal da escola. Não te esqueças de indicar o número de jogos que se realizaram e de incluir um quadro semelhante ao anterior, que resuma os resultados obtidos por cada equipa.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 16

Jogo do intervalo

Número de jogadores : 2

Regras : Define-se um intervalo, por exemplo [150, 230], que representa todos os números entre 150 e 230.
O primeiro jogador introduz na máquina de calcular um número (inteiro ou não) à sua escolha. O segundo jogador escolhe outro número e adiciona-o ao primeiro de forma a tentar obter uma soma que caia dentro do intervalo. Se não conseguir será a vez do outro jogador tentar, partindo do número que ficou no visor.
Ganha o primeiro que o conseguir.

1. Joga com o teu colega este jogo até perceberes como ele funciona e regista os números que vão aparecendo no visor e os que se vão introduzindo.

2. Pensa agora como em apenas uma jogada poderias ganhar se:

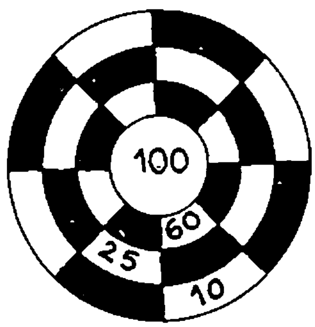
. o intervalo combinado for [-10, -9] e o primeiro número que é introduzido no visor for 1,5. E se for -20?

. e se o intervalo for [2,03 ; 2,1] e o primeiro número introduzido for 10?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 17

Tiro ao alvo

Regras: como sabes, num jogo de tiro ao alvo, por cada seta que acerta no alvo, um jogador marca os pontos que estão assinalados na zona em que acertou. Mas nem sempre a seta acerta no alvo ou fica lá espetada. Assim, neste jogo foi decidido que sempre que um jogador não consegue que a seta fique espetada perde 75 pontos.



1. Numa série de 5 tiros, o Rui obteve 95 pontos e o Manuel 60. Indica os pontos que cada um obteve em cada tiro.

2. Se dispuseres de 6 tiros, quais das seguintes pontuações poderás obter?

. 60 pontos
. 405 pontos
. 0 pontos

3. A Isabel acertou sempre no alvo e obteve 450 pontos. Sabendo que ela dispunha, no máximo, de 7 setas, descobre várias maneiras de obter esta pontuação.

4. Nos dois primeiros tiros, o João não acertou no alvo. Se dispuser ainda de três tiros entre que valores se poderá situar a sua pontuação?

5. Inventa um problema baseado neste jogo do tiro ao alvo. Resolve o problema que inventaste.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 18

Às voltas com a calculadora

1. Introduz na calculadora a seguinte sequência e observa os resultados que vais obtendo.

5 +/- +/- +/- +/- +/-

2. Para cada uma das sequências apresentadas:

a) prevê o resultado que se obtém e regista-o.
b) introduz na tua calculadora cada sequência e regista o resultado.
c) compara os resultados obtidos em 1) e 2) e comenta-os.

2 X 3 ÷ 5
6 : 2 + 1
1 + 3 X 5
8 — 6 : 2
3 +/- ÷ 2
1 — 2 +/-
4 +/- — 2
0,1 X 3 — 0,1 +/-

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 19

Esta carola não pára

Número de jogadores: 2

Regras:

1. O jogo desenvolve-se em séries de três jogadas. Em cada série, um dos jogadores resolve as questões propostas enquanto o adversário regista as pontuações na folha de papel. Em seguida, invertem posições.

2. Em cada jogada, a máquina pode ser utilizada, no máximo, uma vez.

3. Não se pode utilizar nem papel nem lápis para fazer cálculos.

4. O lápis é apenas utilizado para registar as pontuações.

5. Registam-se 5 pontos por cada vez que se utilizar a calculadora para além das vezes permitidas.

6. Registam-se 2 pontos por cada resposta incorrecta.

7. A pontuação final de cada jogador é a soma das pontuações obtidas em cada uma das jogadas.

8. Ganha quem tiver menor pontuação.

SÉRIE A

JOGADA 1	JOGADA 2	JOGADA 3
537X23X0X128	423X0,1X0,01	103X(201+15)
537+530:(400+130)	37X403X105	216X103
500+530:50	105X403X37	103X201+103X15

SÉRIE B

JOGADA 1	JOGADA 2	JOGADA 3
-2-100+5X20+2	201-425-357	-300+100
30-12-8-10+5	-425+201-357	150-70+150-30
0,34-2,4+3,92X2	(-400-25)-357+201	125X8-(30X100)

SÉRIE C

JOGADA 1	JOGADA 2	JOGADA 3
1000+20+5+900-1925	307-575-100	-400+200
-15-10-25+50+1	-575+307-100	-120+250-80+50
0,19-2,9+6,83X3	(-500-75)-100+307	20X100-(250X16)

SÉRIE D

JOGADA 1	JOGADA 2	JOGADA 3
423X11X0X12	0,1X301X0,01	234X423
327:(322+5)-4	403X27X32	423X(220+14)
1034-422:21	27X(400+3)X32	423X220+423X14

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 20

Ida da Terra à Lua

A distância da Terra à Lua é de 380 000 Km. Quantas vezes será necessário dobrar ao meio uma folha de papel com 2 mm de expessura para percorrer essa distância?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO

ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 21

Uma escolha difícil...

No primeiro dia deste ano o pai da Marta propôs-lhe duas hipóteses de mesada.

<u>Hipótese</u> <u>A</u> - 5$00 em Janeiro, 10$00 em Fevereiro, 20$00 em Março e assim por diante, dobrando sempre em cada mês a mesada do mês anterior.

<u>Hipótese</u> <u>B</u> - 500$00 em Janeiro, 600$00 em Fevereiro, 700$00 em Março e assim sucessivamente, sendo a mesada aumentada de 100$00 em cada mês.

a) Se a Marta optar pela hipótese que lhe dá mais dinheiro no final do ano, qual é a sua escolha?

b) Imagina agora que a Marta opta por depositar as mesadas. O Banco deixa-a fazer um primeiro depósito de 1 000$00 e os restantes no montante que ela pretender. Será que a Marta manteria a opção anterior sabendo que o Banco lhe dá um juro capitalizável (juro que vai sendo acrescentado à quantia depositada) de 2% em cada mês?

c) Formula um problema baseado nas hipóteses de escolha que foram propostas à Marta.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 22

Descontos e impostos

Numa loja de artigos de vestuário, tem-se 20% de desconto, mas é necessário pagar um imposto de venda de 17%.

a) O que é preferível calcular primeiro, o desconto ou o imposto? Porquê?

b) Imagina agora que o preço do artigo que compraste é de 1 000$00.
- Quanto pagarás se o vendedor fizer primeiro o desconto?
- E se o vendedor aplicar primeiro o imposto?

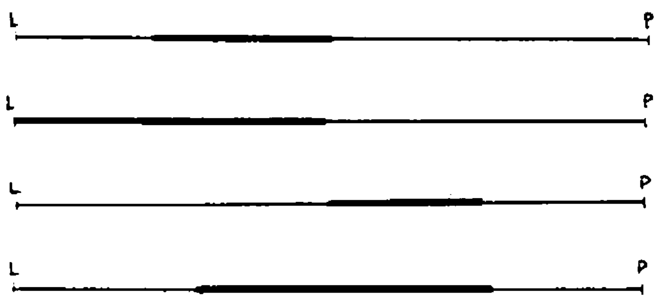
c) Comenta os resultados que obtiveste e compara-os com a tua resposta inicial.

d) Tenta com outros valores à tua escolha. Que conclusões tiras?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 23

A viagem de combóio

Numa viagem de combóio entre Lisboa e o Porto a Maria adormeceu. Quando acordou ainda tinha que percorrer metade da distância que tinha feito enquanto dormia. Considerando que a parte mais carregada de cada diagrama da figura corresponde ao tempo em que a Maria esteve a dormir, qual deles se ajusta melhor à situação descrita.



Inventa outro problema que se possa colocar a propósito da viagem da Maria.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO

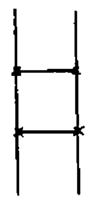
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA 24

As escadas mágicas...

Acabaram de ser lançados no mercado conjuntos compostos por ripas de madeira e peças metálicas de união entre as ripas que permitem a construção de escadas do tipo das da figura.



Para construir uma escada com dois degraus preciso de oito ripas e de quatro peças metálicas.

a) Para construir uma escada com três degraus de quantas peças metálicas preciso? E se a escada tiver 8 degraus?

b) Consegues arranjar um processo rápido que te permita determinar o número de peças metálicas necessárias para construir uma escada, desde que saibas o número de degraus da escada? Elabora um pequeno texto em que apresentes as razões que te levam a pensar que o teu processo é correcto.

c) Qual o número de ripas necessário para construir uma escada com 3 degraus? E com 4? E se a escada tiver 5 degraus?

d) Se souberes que para construir uma escada gigante com 111 degraus são precisas 335 ripas, consegues determinar o número de ripas que precisas para construir uma escada com 112 degraus?

e) De quantas ripas precisas para construir uma escada com 20 degraus? E se a escada tiver 100 degraus?

f) Explica as relações que foste estabelecendo e o que te leva a pensar que elas estão correctas.

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 25

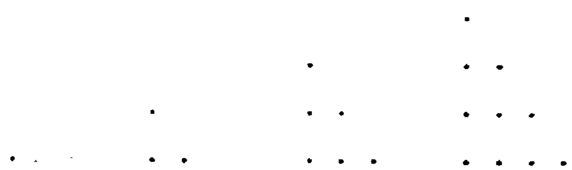
Investigando sequências

1. a) Completa os espaços assinalados, em cada uma das sequências

14	12	10	....	....			
-7	-9	-11	....	....			
5	....	15	20	....			
1	4	9	16	....			
0,2	2	20	....	....			
1	1	2	3	5	8	....	....

b) Qual é o décimo termo de cada uma das sequências anteriores?

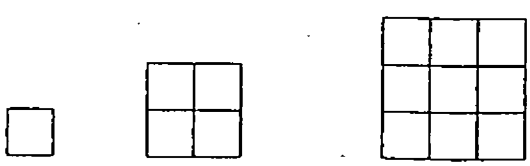
2. Observa a seguinte sequência de figuras.



a) Desenha a quinta figura da sequência.

b) Quantos pontos tem cada figura? E quantos terá a sétima figura?

3. a) Observa as seguinte figuras



b) Desenha a quarta figura da sequência anterior. Quantos quadrados dos mais pequenos tem? E quantos quadrados pequenos tem a mais cada figura em relação à anterior?

4. Completa:

$1 = 1$

$1 + 3 = 4$

$1 + 3 + 5 =$ ....

$1 + 3 + 5 + 7 =$ ....

Qual será o valor de $1 + 3 + 5 + 7 + \ldots + 201$?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 26

Investigando regularidades

1. Observa a seguinte regularidade e completa os espaços em branco.

$1^2 = 1$

$11^2 = 121$

$111^2 = 12321$

$1111^2 =$ ....

$11111^2 =$ ....

2. a) Completa

12 x 42 = ... 32 x 69 = ... 42 x 36 = ...

21 X 24 = ... 23 x 96 = ... 24 x 63 = ...

b) Descobre outros pares de números que verifiquem esta regularidade.

c) Que relação se deve estabelecer para que se verifique esta regularidade?

3. a) Dispõe os algarismos 1, 2, 3, 4 e 5, nos espaços em branco, de forma a obteres o maior produto possível

.... X ....

b) E se os algarismos fossem 2, 3, 5, 6 e 7?

c) Consegues arranjar um processo rápido para, a partir de 5 algarismos, formares dois números, um com 2 e outro com 3 algarismos de forma a que o seu produto seja o maior possível?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO - 1991/1992
FICHA 27

Investigando sobre potências

1. Completa a tabela com os algarismos das unidades de cada uma das potências dos números indicados:

número	quadrado	cubo	4ª pot.	5ª pot.	6ª pot.	7ª pot.
1						
2						
3						
4						
5						
6						
7						
8						
9						

2. Analisa a tabela e procura simetrias e regularidades.

3. Qual é o algarismo das unidades de

a) 6^{1992} ?

b) 5^{493} ?

c) 234^{127} ?

d) 3^{3039} ?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO
7º ANO
FICHA A

1. Com a calculadora, determina 3 números cujo produto seja 2431. Regista na folha tudo o que fizeres para encontrar a resposta.

2. As "boas" notícias correm depressa...
O Luís encontrou 2 colegas e disse-lhes "A escola vai fechar". Passados dez minutos, cada um dos dois repetiu a notícia a dois outros colegas. Se a novidade se continuar a espalhar desta maneira, quantas pessoas a saberão, ao fim de oitenta minutos?

3. A Ana e a Rita estão indecisas diante de um distribuidor automático de pastilhas elásticas que está quase vazio: tem 8 pastilhas cor-de-laranja e 6 amarelas. Gostavam de tirar uma pastilha para cada uma mas da mesma cor.
Cada pastilha custa 5$00. Quanto é que se têm de dispôr a gastar para o conseguirem?

ESCOLA SECUNDÁRIA DO ALTO DO SEIXALINHO

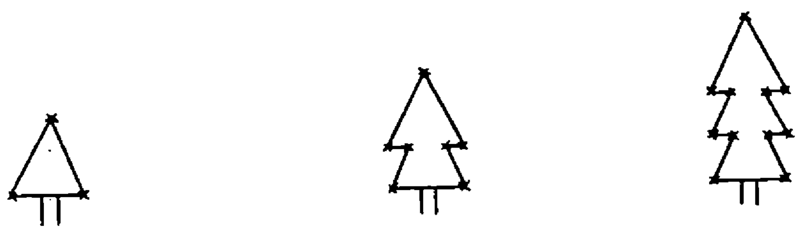
ESCOLA SECUNDÁRIA DO BARREIRO

7º ANO - 1991/1992

FICHA B

As árvores de Natal

Podemos desenhar árvores de Natal de diferentes tamanhos.



tamanho 1	tamanho 2	tamanho 3
3 lâmpadas	7 lâmpadas	11 lâmpadas

a) Quantas lâmpadas há numa árvore de Natal com tamanho 20? Explica como encontraste a tua resposta.

b) Quantas lâmpadas seriam necessárias para uma árvore de tamanho 100? Explica as relações que foste estabelecendo e justifica a sua validade.

Anexo 2

Cópia dos Acetatos Usados na Aula de Resolução de Problemas com Toda a Turma

O TORNEIO DE TÉNIS

Doze pessoas participaram num torneio de ténis. Cada jogador jogou uma vez com cada um dos outros jogadores. Quantos jogos se realizaram durante este torneio?

QUANTAS MAÇÃS TINHA A MARIA?

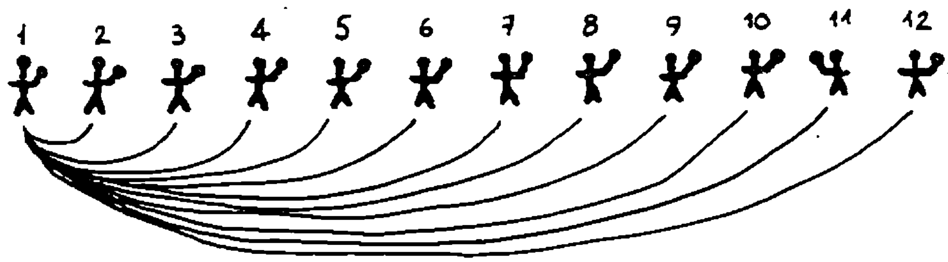
A Maria tinha uma cesta com maçãs e encontrou um amigo a quem deu metade das maçãs e mais meia maçã. Depois, encontrou outro amigo a quem deu, igualmente, metade das maçãs que ainda tinha e mais meia maçã. Por fim, encontrou um terceiro amigo e deu-lhe metade das maçãs que lhe restavam e mais meia maçã, tendo ficado sem nenhuma.
Quantas maçãs tinha a Maria antes de encontrar o primeiro amigo?

OS CACIFOS

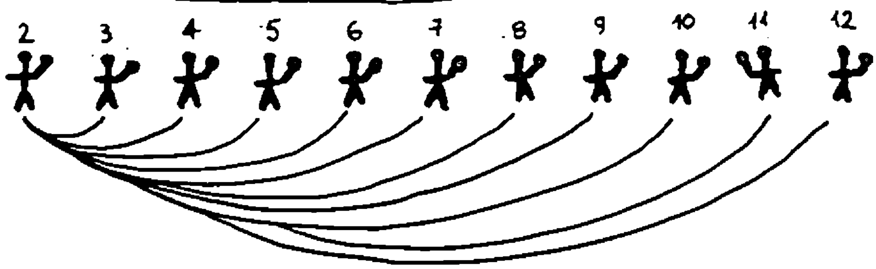
Os cacifos de uma escola estão numerados de 1 a 500.
Partindo do cacifo 1, verificamos que de seis em seis cacifos há um decalque azul, de nove em nove há um decalque amarelo e de dez em dez há um verde.
Qual é o número do primeiro cacifo que tem os três decalques?

12 PESSOAS PARTICIPARAM NUM TORNEIO DE TÉNIS.
CADA JOGADOR JOGOU UMA VEZ COM CADA UM DOS OUTROS JOGADORES.
QUANTOS JOGOS SE REALIZARAM DURANTE ESTE TORNEIO?

RESOLUÇÃO (A)

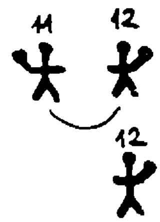


JOGADOR 1 =
= 11 JOGOS



JOGADOR 2 =
= 10 JOGOS
JOGADOR 3 =
= 9 JOGOS
JOGADOR 4 =
= 8 JOGOS
JOGADOR 5 =
= 7 JOGOS
JOGADOR 6 =
= 6 JOGOS
JOGADOR 7 =
= 4 JOGOS

. . .



JOGADOR 11 =
= 1 JOGO
JOGADOR 12 =
= 0 JOGO

11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 0 = 66 JOGOS

Realizaram-se 66 jogos.

RESOLUÇÃO (B)

CADA UM DOS 12 JOGADORES JOGOU COM CADA UM DOS RESTANTES.

1º JOGADOR = 11 JOGOS
2º " = 11 "
3º " = 11 "
. . .
12º " = 11 "

$12 \times 11 = 132$

Realizaram-se 132 jogos.

RESOLUÇÃO (C)

Realizaram-se 66 jogos.

MARIA TINHA UMA CESTA COM MAÇÃS E ENCONTROU UM AMIGO A QUEM DEU METADE DAS MAÇÃS E MAIS MEIA MAÇÃ. DEPOIS, ENCONTROU OUTRO AMIGO A QUEM DEU, IGUALMENTE, METADE DAS MAÇÃS QUE AINDA TINHA E MAIS MEIA MAÇÃ. POR FIM, ENCONTROU UM TERCEIRO AMIGO E DEU-LHE METADE DAS MAÇÃS QUE LHE RESTAVAM E MAIS MEIA MAÇÃ, FICANDO SEM NENHUMA.

QUANTAS MAÇÃS TINHA A MARIA ANTES DE ENCONTRAR O PRIMEIRO AMIGO?

RESOLUÇÃO (A)

10 não dá porque sobra;
5 não dá porque as maçãs não chegam;
8 não dá porque sobra;
É o 7.

RESOLUÇÃO (B)

- Se, no fim, a Maria fica sem maçãs, então, tinha uma antes de encontrar o terceiro amigo:

$$0,5 + 0,5 = 1 \quad e \quad 1 + 0 = 1$$

- Se, depois de encontrar o segundo amigo, ficou com uma é porque antes tinha três:

$$1,5 + 0,5 = 2 \quad e \quad 1 + 2 = 3$$

- Se, depois de encontrar o primeiro amigo, ficou com três maçãs é porque no início tinha 7.

$$3,5 + 0,5 = 4 \quad e \quad 3 + 4 = 7$$

Tinha 7 maçãs.

RESOLUÇÃO (C)

Deve ser um número ímpar de maçãs para que metade mais uma dê um número inteiro de maçãs.

- Se fossem 13 maçãs:

1º amigo $6,5 + 0,5 = 7$ fica com $13 - 7 = 6$
2º amigo $3 + 0,5 = 3,5$ fica com $6 - 3,5 = 2,5$
3º amigo $1,25 + 0,5 = 1,75$ fica com $2,5 - 1,75$

Então, 13 são demais.

- Se fossem 9 maçãs:

1º amigo $4,5 + 0,5 = 5$ fica com $9 - 5 = 4$
2º amigo $2 + 0,5 = 2,5$ fica com $4 - 2,5 = 1,5$
3º amigo $0,75 + 0,5 = 1,25$ fica com $1,5 - 1,25$

Ainda são demais.

- Se fossem 7 maçãs:

1º amigo $3,5 + 0,5 = 4$ fica com $7 - 4 = 3$
2º amigo $1,5 + 0,5 = 2$ fica com $3 - 2 = 1$
3º amigo $0,5 + 0,5 = 1$ fica com $1 - 1 = 0$

A Maria tinha 7 maçãs.

Anexo 3

Escala de Classificação Holística Focada

Escala de Classificação Holística Focada*

0 Pontos

Estes testes apresentam uma das seguintes características:

. Estão em branco.

. Os dados do problema são apenas copiados, mas nada é feito com os dados ou o trabalho mostrado não indica compreensão do problema.

. É apresentada uma resposta incorrecta, mas o trabalho que conduz a essa resposta

a) não é compreensível.

b) não é mostrado.

1 Ponto

Estes testes apresentam uma das seguintes características:

. Há algum trabalho feito (para além da simples cópia dos dados) que reflecte alguma compreensão do problema, mas a abordagem utilizada só conduziria a uma solução por mero acaso.

. Inicia-se a utilização de uma estratégia não apropriada mas não se desenvolve e não há qualquer evidência de que o aluno utilizou ou tentou utilizar outra estratégia. Aparentemente o aluno tentou uma abordagem que não resultou e depois desistiu.

. O aluno tentou atingir um dos objectivos necessários à resolução do problema mas não o conseguiu.

2 Pontos

Estes testes apresentam uma das seguintes características:

. O aluno utilizou uma estratégia não apropriada e obteve uma resposta incorrecta, mas o trabalho mostrado revela alguma compreensão do problema.

. Foi utilizada uma estratégia apropriada, mas

a) não foi utilizada completamente de forma a poder resolver o problema(e.g. numa lista organizada, o aluno só completou duas entradas);

b) foi desenvolvida de forma incorrecta e não levou a qualquer resposta ou conduziu a uma resposta incorrecta.

. O aluno atingiu eficazmente um dos objectivos necessários para resolver o problema, mas não prosseguiu a sua resolução.

. É apresentada a resposta correcta para o problema mas o trabalho que a ela conduziu

a) não é compreensível;

b) não é mostrado.

3 Pontos

Estes testes apresentam uma das seguintes características:

. O aluno utilizou uma estratégia que podia ter levado a uma resposta correcta, mas uma parte do problema não foi compreendida ou uma das suas condições foi ignorada.

. Foram correctamente utilizadas estratégias apropriadas para resolver o problema, mas

a) por razão desconhecida, o aluno deu uma resposta incorrecta;

b) é dada a parte numérica da resposta mas não está completa ou convenientemente identificada;

c) É dada a resposta correcta e há alguma evidência de que foram seleccionadas as estratégias apropriadas. Contudo, o processo de implementação das estratégias não é completamente claro.

4 Pontos

Estes testes apresentam uma das seguintes características:

. O aluno cometeu um erro ao desenvolver uma estratégia apropriada para resolver o problema. No entanto, tal erro não reflecte incompreensão do problema ou do desenvolvimento da estratégia: trata-se de um erro de cálculo ou de um dado mal copiado.

. Foram seleccionadas e implementadas estratégias apropriadas para resolver o problema. É apresentada a resposta correcta e completa para o problema.

*Esta escala é uma adaptação de uma desenvolvida por Charles, Lester e O'Daffer (1987).

Anexo 4

Guião-Base da Última Reunião com as Professoras

GUIÃO-BASE DA ÚTIMA REUNIÃO COM AS PROFESSORAS

Balanço pontual

1. Resolução de Problemas

. As reacções aos primeiros problemas.
. O que se foi alterando? Exemplos.
. Aspectos em que os alunos tiveram mais dificuldades.
. O que se ganhou com a insistência na resolução de problemas?

2. Formulação de problemas

. Primeiras reacções dos alunos.
. O que se foi alterando? Exemplos.
. Que importância dar a enunciar um problema diferente do das fichas?
. Aspectos que a formulação de problemas poderão ter favorecido. Exemplos.

3. O trabalho em grupo

. Como trabalhavam inicialmente os alunos? Exemplos.
. Como foi evoluindo a forma de trabalhar em grupo?
. Aspectos positivos e negativos deste tipo de trabalho. Exemplos.

4. A calculadora

. As primeiras reacções dos alunos. Exemplos.
. Como evoluiu a maneira como os alunos usavam a calculadora?
. A sua utilização foi importante? Porquê? Exemplos.
. A sua utilização colocou alguns problemas? Exemplos.

5. Balanço geral

. Ambiente geral que se foi estabelecendo na sala de aula.
. O que considera mais importante ao nível da evolução observada nos alunos?
. Quais foram as maiores dificuldades sentidas ao longo do trabalho?
. Quais os aspectos desta experiência que considera mais relevantes?

Anexo 5

Questionário Aplicado aos Alunos

QUESTIONÁRIO

1. Imagina que estás a escrever uma carta a um teu amigo. Como descreverias a forma como têm decorrido este ano as aulas de Matemática?

2. Gostaste de usar a calculadora? Porquê?

3. Durante este ano tens resolvido bastantes problemas. Pensas que esta experiência tem sido importante? Porquê?

4. O que achaste do facto de, em muitas aulas se ter trabalhado em grupo? Como te sentiste a trabalhar em grupo?

Anexo 6

Alguns Enunciados Apresentados pelos Alunos nas Actividades de Formulação de Problemas

1ª Actividade (ficha 15)

No mesmo teste a Mafalda obteve 50 pontos. Quantas questões acertou?

A Mafalda respondeu a 7 questões e obteve 19 pontos. Quantas questões acertou e errou?

A Mafalda fez 8 quetões acertou 5 e errou 3 questões assim com as 5 questões fez 50 pontos mas como errou 3 questões desconta 21 pontos.

A Mafalda ainda fez o mesmo teste e respondeu a todas as questões e obteve 15 pontos. Quantas questões acertou?

No mesmo teste a Mafalda obteve 66 pontos. Quantas teve ela certas e quantas erradas?

A Mafalda respondeu às 10 perguntas e obteve 15 pontos. Quantas perguntas errou?

2ª Actividade (ficha 17)

O Francisco obteve 195 pontos neste jogo. Sabendo que dispõe no máximo de 10 setas, quantas setas poderá ter usado e de que maneira acertaram no alvo?

A Adérita foi à feira popular e viu uma barraca que se chamava OU TUDO OU NADA. Entre alguns jogos que tinha havia um que lhe chamou a atenção. Cada seta custava 75$00 e ela tinha 450$00 que dava para 6 setas. O sr. Arlindo que era o dono da barraca, disse-lhe as regras do jogo: se ela acertasse no alvo tinha os pontos que lá estavam marcados e se ela errasse descontava 75 pontos. Sabendo que duas setas marcavam 10 pontos cada uma e a Adérita teve 230 pontos, que valores marcavam as restantes setas?

O Ricardo estava a jogar com o Vicente. Tinham os dois direito a 5 setas. O Vicente já tinha gasto todas as setas. Para ganhar ao Vicente, o Ricardo precisava de obter pelo menos 186 pontos com duas setas. Será possível o Ricardo ganhar? E empatar?

Neste jogo de tiro ao alvo o Rui numa série de 7 tiros obteve 260 pontos. Indica os pontos que ele obteve em cada tiro.

O André tem 7 tiros para atirar. Ele obteve 460 pontos. Quantos pontos ele poderá ter obtido em cada tiro?

A Cristina tinha 5 setas e obteve 120 pontos. Quantos tiros falhou ela?

3ª actividade (ficha 19)

Jogada:

a) 325x37 - (101+1537)

b) -20 +10 - 7

c) 42 - 20 +1

Para jogar este jogo deveria usar a calculadora na primeira expressão, uma vez que nas outras se pode fazer as contas de cabeça porque é só somar e subtrair números pequenos."

Jogada:

a) -102 + 2x(30 +21) + (32 + 3,3):35,3

b) 1538 x(32,4 + 24,6) - 23x(25,2 - 0,4)x 12

c) 57 x 1538 - 12(25,2 -0,4)x23

A expressão da alínea a) pode ser resolvida de cabeça porque a soma de números simétricos dá 0 e porque um número a dividir por ele próprio dá 1. Depois bastava usar a calculadora para a expressão b ou c porque elas dão o mesmo valor porque na multiplicação posso alterar a ordem dos termos e 32,4 + 24,6 = 57."

Jogada:

1. 4 - 5 + 4 -10
2. 32 x 103,7 - 230 : 34
3. 0 x 123 : 43 + 350

Tinha que usar a calculadora na expressão 2 porque nas outras pode-se fazer de cabeça.

Jogada:

a) 129,37 + 42,304x(12 -12) - 1

b) 12,4 x(1,02 + 42,3) + 1/2 - 1/2

c) 1/2 + 12,4 x 42,3 + 12,4 x 1,02 - 1/2

A b) e a c) dão o mesmo valor porque 1/2 - 1/2 = 0 e poque 12,4 x(1,02 + 42,3) = 12,4 x 42,3 + 12,4 x 1,02. Como na expressão a) bastava pensar que 12 - 12 = 0 e saber quanto dá 129,37 - 1 ficava fácil de calcular de cabeça. Então tinha que escolher a expressão b) ou c) para usar a calculadora.

Jogada:
23 - 42 + 3
235 x 24 : 132
33 - 31 + 40 x 0

Tinha que usar a calculadora na segunda expressão. Nas outras podia fazer de cabeça.

Jogada:
1045 + 3,37 x(4,67 - 2,57) - 4,35 : 0,23
2,1 x 3,37 - 4,35 : 0,23 + 1000 + 45
456 : (500 - 44) + 356 x 0 x 34,7

A última expressão posso calcular de cabeça porque 456 a dividir por 456 dá um e porque 0 a multiplicar por outros números dá sempre 0. Como as duas primeiras expressões dão o mesmo valor porque só se trocou a ordem dos números e se fez 1000 + 45 = 1045 e 4,67 - 2.57 = 2,1 tinha que usar a calculadora numa delas.

4ª Actividade (ficha 21)

Sabendo que a Marta queria comprar um relógio em Julho que custava 2000$00, qual era a hipótese que escolhia, a A ou a B?

A Marta precisava de 5000$00 no mês de Setembro para pagar a última prestação do seu computador. Qual das hipóteses de mesada terá que escolher?

Imagina agora que ela queria investir no mês de Março as suas mesadas até então recebidas, na bolsa de valores. Ela queria comprar 4 acções de uma certa empresa. Qual das hipóteses a Marta escolheria tendo em conta que cada acção custava 450 escudos?

A Marta precisava de 10000 escudos para dar entrada numa mota. Com qual das duas hipóteses ela poderia ir levantar a mota mais cedo?

A Marta quer depositar o seu dinheiro o mais rapidamente possível. Sabendo que a quantia que tem que depositar é 15000 escudos, qual das hipóteses deve escolher?

A Marta pensou nas duas hipótese que o pai lhe deu a escolher. Querendo ela comprar umas calças de Inverno e também depositar algum dinheiro no banco que hipótese escolheria?

5ª Actividade (ficha 23)

A Maria gostava de ouvir música. Numa viagem de Lisboa ao Porto, quando tinha percorrido 1/4 da viagem começou a ouvir uma cassete. Quando acabou a cassete, ela ainda tinha de percorrer o triplo do que tinha percorrido a ouvir música. Sabendo que a parte carregada corresponde ao tempo em que esteve a ouvir música, qual dos gráficos traduz a viagem da Maria?

A Maria quando já tinha percorrido 1/3 da viagem foi ao vagão restaurante comer uma sandes. Quando terminou tinha percorrido 1/4 do caminho que lhe faltava percorrer antes de ir comer a sandes. Em qual dos gráficos está assinalada a distância que ela percorreu enquanto comia?

A viagem entre Lisboa e Porto demora 3 horas. A Maria esteve a ouvir música durante 1/4 da viagem. Qual das hipóteses a seguir é a mais correcta

Hipótese A ______________________

Hipótese B ______________________

Hipótese C ______________________

Numa outra viagem num comboio regional de Lisboa ao Porto, a Maria quando chegou a 1/4 da viagem foi almoçar ao restaurante do comboio. Sabendo que a parte carregada corresponde ao tempo que ela esteve no restaurante, qual dos esquemas representados de seguida é mais correcto para demonstrar a viagem da Maria.

Atendendo à mesma situação do problema da Maria, assinala qual a situação em que ela adormeceu menos tempo e em que ao acordar faltava-lhe metade do percurso.

A Maria estava a ouvir música, mas quando a cassete acabou ela ainda tinha de percorrer 2 vezes o que percorreu a ouvir música. Qual dos gráficos se adequa melhor à situação.

Nota: a parte a carregado foi a que ela esteve a ouvir música.